



TITLE:

交換機における集線方式の効率化に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

上田, 徹

CITATION:

上田, 徹. 交換機における集線方式の効率化に関する研究. 京都大学, 1984, 工学博士

ISSUE DATE:

1984-07-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r5346>

RIGHT:

新制
工
608
京大附図

交換機における集線方式の 効率化に関する研究

昭和 59 年 1 月

上 田 徹

交換機における集線方式の 効率化に関する研究

昭和 59 年 1 月

上 田 徹

交換機における集線方式の 効率化に関する研究

上 田 徹

電気通信システムに收容される加入者のトラヒック密度は一般に低く、回線を高効率で使用するために集線が行われる。集線のために使用される空間分割形格子スイッチの收容入線数やスイッチ間でとられる出線の複式結線形式はスイッチの費用や加入者の收容替えに伴う費用および呼損率に影響するため、適正な呼損率を保ちつつ経済的である集線方式を求めることは交換機設計上、重要な課題である。

本論文では、交換機における効率的な集線方式を提供することを目的として、まず加入者線における負荷のばらつきの状況を明らかにし、既存の集線方式をできるだけ保存しながら柔軟に加入者のトラヒック密度の大きさに対応できる集線方式を検討する。更に、既存の通話路網に容易に適用できる最適な複式結線形式を提案し、その実装法や配線密度について解析する。

目 次

第1章 緒 論	1
1.1 本研究の背景	1
1.2 集線系の設計における問題点	3
1.3 本論文の構成	5
第2章 加入者呼量に関する統計解析	6
2.1 まえがき	6
2.2 スイッチサイズと呼損率	8
2.3 スイッチ当りの呼量変動	21
2.4 スイッチサイズと呼量変動	30
2.5 むすび	31
第3章 電子交換機の集線方式	33
3.1 まえがき	33
3.2 既存の通話路網構成法	33
3.3 新方式による通話路網構成法	37
3.4 新方式のトラヒック特性	40
3.5 むすび	50
第4章 均衡飛び複式結線形式	51
4.1 まえがき	51
4.2 均衡不完備ブロック配置 (BIBD) の作り方	53
4.3 均衡飛び複式結線形式 (BSM) の作り方	56
4.4 BSMによる多段の通話路網の構成法	67
4.5 経路選択プログラム	77
4.6 むすび	78

第5章 均衡飛び複式結線形式のトラヒック特性	79
5.1 まえがき	79
5.2 同時接続数分布の近似計算法	79
5.3 トラヒック特性	86
5.4 むすび	91
第6章 集線方式（グレージング）の評価法	92
6.1 まえがき	92
6.2 対象とする集線方式	93
6.3 集線方式（グレージング）の評価法	93
6.4 グレージングの評価	106
6.5 むすび	112
第7章 均衡飛び複式結線形式の実装法	113
7.1 まえがき	113
7.2 $1 \times n$ 格子によるBSM構成法	114
7.3 正方形格子によるBSM構成法	131
7.4 むすび	141
第8章 結 論	143
謝 辞	145
参考文献	146
付録1 完全直交ラテン方格とそれから作られる 均衡不完備ブロック配置（BIBD）の特徴	151
付録2 正規化行列Cに関する性質	163

第1章 緒 論

1.1 本研究の背景

電気通信システムとして任意の加入者間の通信を常に可能にするためには、加入者相互間を全て結ぶ回線を設備する方法が考えられるが、この方法によれば n 人の加入者に対して $n(n-1)/2$ 本の回線が要求される。つまり加入者がふえるにつれ加入者数の自乗のオーダーで回線をふやしていかなければならない。現在の電話加入者4千万を例にとれば約 10^{15} 回線が必要となる。このように加入者相互間にすべて回線を引けば相手話中や回線、端末の障害時以外には常に通信が可能であるが、この方法では非常に高価なシステムとなる。また、距離が離れた加入者同士については伝送路障害の可能性が増し、信頼性上、問題がある。これに対し、実際の電気通信システムでは加入者間に交換機を配することにより、はるかに少ない回線数で任意の加入者間の接続を可能にしている。しかし、交換機を配する方式では呼損率、待合せ時間、信頼性などに対しては許容範囲内の品質を確保し、しかもできるだけ低いコストでサービスを提供しなければならない。この問題の解決にはA. K. Erlangが創始したトラヒック理論あるいは待行列理論が重要な貢献をなしている。

加入者の数が少なければ1台の交換機で加入者間の接続を行えるが、加入者がふえるにつれて1交換機では呼処理要求を裁ききれず、地域毎に交換機を設ける必要が生じる。しかし、この方法では、交換機相互間を結ぶ回線数が自乗オーダーで増加するために更に上位階層の交換機を設けるといった事態が生じる。このような局面を反映して、各国の交換機は、我国の通信網構成すなわち総括局を最上位とし、以下、中心局、集中局、端局と階層化した構造と同様の階層構造（有階位網）となっている。

このような通信網を経済的かつ高品質に設計するために、従来から

- (1) 交換機設計^{[1] [2]}
 - (i) 通話路網構成法^[3]
 - (ii) 制御系構成法^{[4] [5]}
- (2) 回線網設計
 - (i) 階位（階梯）数決定法^[6]

(ii)回線数算出法^[7]

について検討されてきた。

通話路網は通常、格子スイッチを多段に組合わせた構成をとっており、できるだけ経済的にしかも予め設定された呼損率の上限値を越さないようにスイッチの大きさ、段数、複式接続の要否などが決められる。

制御系については、接続遅延時間などの所望の品質を満足するよう、待ち行列理論やシミュレータを用いて処理プロセッサの能力評価やメモリ類の設備数の算出、入出力機器類の設計を行っている。

回線網設計のうち階位数については、従来、我国では端局、集中局、中心局および総括局の4階位で運用されて来たが、光ファイバーや衛星通信の出現により、階位数の減少も含めた網設計法の見直しが進められている。

回線数については、斜（従属）回線と基幹回線が単位呼量を運ぶのに必要な費用を比較することにより決定されている。^[7] この方法の外に複数の最繁時間帯に着目した回線数算出法の研究^[8]も行われているが、我国ではトラヒックの測定体制が充分でなく、未だ実用化されていない。

本論文の対象は今日、開発の対象となっている蓄積プログラム制御方式による交換機（これは電子交換機と呼ばれる）の通話路網設計である。

電子交換機の構成は概略、通話路網、通話路駆動装置、信号送受信装置などから成る通話路系と、中央制御装置、メモリ装置などから成る中央処理系とから構成されている。このうち通話路網は先にも述べたように格子スイッチを多段に組合わせた構成をとっている。たとえば日本の電子交換機の代表例であるD10形交換機の通話路網は8段の格子スイッチで構成されている。

加入者線の使用率は一般に低く、空いている時間の方がふさがっている時間よりもはるかに多く、加入者が共通に使用する端局－集中局間などの回線を加入者数と同数だけ用意すると回線の使用率も加入者線と同様に低くなる。そこで加入者からの呼の生起がランダムであることを利用して回線の空き時間を融通し合うことにし、回線数を加入者線より減らして高能率で使う方法、即ち集線系としての検討が重要となる。例えば加入者呼率（加入者当りの呼量）が0.1 erl（erl：トラヒック密度を表す単位で、対象としている時間の間ずっと使っていれば1 erlである）の場合に、回線を0.7程度の能率で運用できれば、回線数は加入者

数の1/7 に減らせることになる。先に述べたD10形交換機では加入者を収容する側の最初の2段のスイッチ群で集線比 2:1 ~ 12:1 の集線を行っている。ところが集線を行っている段（スイッチ群）では呼損が生じ、その呼損率が対象とする回線群が空いているにも係らず入線（加入者線）と出線間の経路を設定できない確率すなわち通話路網の内部ふくそう率の主たる要因となるため、初段のスイッチ間の負荷の不均衡が直ちに加入者が収容されている初段のスイッチ毎の内部ふくそう率の違いになる。不均衡はスイッチサイズが小さい程、生じやすくなる。このため従来は負荷の不均衡が生じると加入者の収容替えを行ってきた。しかし保守業務の自動化、高度化の観点からは加入者の収容替えは望ましくない。

本研究は通話路網設計で最も重要な集線系の設計法を検討するものであり、集線系におけるスイッチ間の負荷の不均衡を統計的に分析し、負荷の不均衡をスイッチサイズに係らず解消する方法を提案するものである。また既存方式をできるだけ変更することなく柔軟に集線比変更に対処し得る方式も示す。

1. 2 集線系の設計における問題点

集線系としては加入者交換機とは別に集線装置を設ける場合と、加入者交換機の通話路網の一部として組込まれている場合とが考えられる。また、そこで用いられる素子としては

- (i) 入線数 n と出線数 m との間の接続を物理的スイッチの開閉により行う空間分割形スイッチ、
- (ii) 入線数 n に対応するチャンネル数 n を持つ入側メモリと出線数 m に対応するチャンネル数 m を持つ出側メモリを設け、入側メモリのチャンネル i の情報を出側メモリのチャンネル j に書込むことにより入線 i と出線 j との接続を行う時分割形スイッチ

とが考えられる。従来、用いられてきた素子は空間分割形スイッチであるが、近年、電子技術の発達に伴い、入線数 1000、出線数 1000 程度を一挙に交換できる時分割形スイッチが主流を占めるようになってきた。しかし、光ファイバや画像通信などの大量の情報を扱う方式では再度、空間分割形の広帯域（光）スイッチが有望視されるようになってきた。

加入者線の集線系においては時分割形スイッチを用いた通話路網を通せない呼出し信号や電話機に供給する直流電流を加入者線回路から供給する必要があるが、加入者線回路のコストが高いので、低呼率加入者に対してはそのような信号も通せる空間分割形集線段を用いて先ず集線を行い、集線された回線単位に加入者線回路を設けることにより経済化を図ろうとしている。

このような状況下で空間分割形スイッチが再度、クローズアップされてきたのである。本論文では、特に設計の難しい空間分割形集線系を中心に扱っている。

(1) 加入者呼量に関する統計解析

空間分割形スイッチを用いた加入者交換機の通話路網は経済性と全体としての呼損率とを満足するために、できるだけ開閉素子数の少ない格子スイッチを用い、段数を多くする方法を従来は採用している。この場合には加入者線の收容されるスイッチ毎の呼損率の差は加入者の收容替えを行なうことで均衡させている。しかし收容替えに要する費用と手間を考慮すると、できるだけスイッチ間の負荷のばらつきを小さくするためにスイッチサイズを大きくした方がよい。そのため、同一スイッチ内に收容されている入線間の負荷の不均衡の影響を実測データに基づき定量的に評価し、收容替えの必要がなくなるスイッチサイズについて検討する必要がある。

(2) 既存スイッチを利用する場合の集線比の変更法

通常、集線比は $n : 1$ (n は整数 $2, 3, 4, \dots$) のように整数比で与えられるが、費用の節約のため、集線比 $1 : 1$ から $2 : 1$ にとぶのではなく、 $3 : 2$ 程度にしたい場合も出てくる。このような場合には既存方式への変更をできるだけ抑えて希望の集線比を実現する必要がある。そこで中継交換機で特に必要な集線比 $3 : 2$ の実現法及びそれを拡張し他の集線比にも適用可能な方法を検討しなければならない。

(3) 理想的な集線方法の実現法

既存方式にあまり拘わる必要がなく、単に利用すべき素子（たとえば $1 \times n$ を使うべきか、 $n \times n$ を使うべきか）だけが指定されている場合には、更に有効な集線方式が可能と思われる。また、スイッチサイズを小さくして経済性を確保し、スイッチ間の複式結線でスイッチ間の負荷均衡を吸収するような新しい複式結線形式が望まれる。新しい複式結線形式に対しては既存方式と比較で

きる評価尺度が必要であり、また実現上の容易さも確保しなければならない。

1.3 本論文の構成

以上、節1.2 で述べた問題点を解決するため、先ず第2章では加入者呼量に関する統計解析を示す。

第3章では既存交換機の変更をできるだけ抑えつつ、各種集線比を実現する集線形式（複式結線形式）を示す。

第4章では均衡飛び複式結線形式（BSM）と呼ばれる新しい複式結線形式を提案し、第5章にそのトラヒック特性を示す。

第6章では実験計画法における配置の評価法を利用した集線形式の評価法を示し、その評価法によれば第4章で提案する均衡飛び複式結線形式が最適であることを示す。

第7章では既存の集線形式の実装、配線法と同程度に簡易化した均衡飛び複式結線形式の実装法、配線法を示す。

第8章では本論文で得られた主な結論と今後、検討すべき問題を述べる。

第2章 加入者呼量に関する統計解析

2.1 まえがき

電話の加入者は加入者交換機に收容されるが、加入者当りのトラヒック量（呼量）は一般に低いため、通常、図 2.1 のように入線数 n に比べて出線数 m が少ない格子スイッチを用いて集線が行う方法を採用している（図 2.1 参照）。この種の空間分割形の格子スイッチの費用は開閉素子、即ち、図 2.1 の×印で示される（交）差点数の数にほぼ一致するため呼量当りの差点数が少ない程、経済的な通話路網になる。

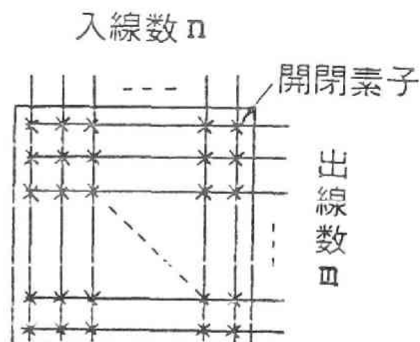


図 2.1 格子スイッチ

通話路網の各段を入線数 n と出線数 m が等しい格子スイッチで構成した場合、加入者数がふえるにつれ、 n を一定とすれば段数をふやす必要があり、 n を可変とすれば、 $n=6$ 程度が最適であることが知られている（図 2.2；[9]の図 13 再掲）。すなわち、同じ規模の交換機では一般にスイッチ当りの差点数を少なくした同形スイッチにより多段の通話路網を構成した方が有利である。

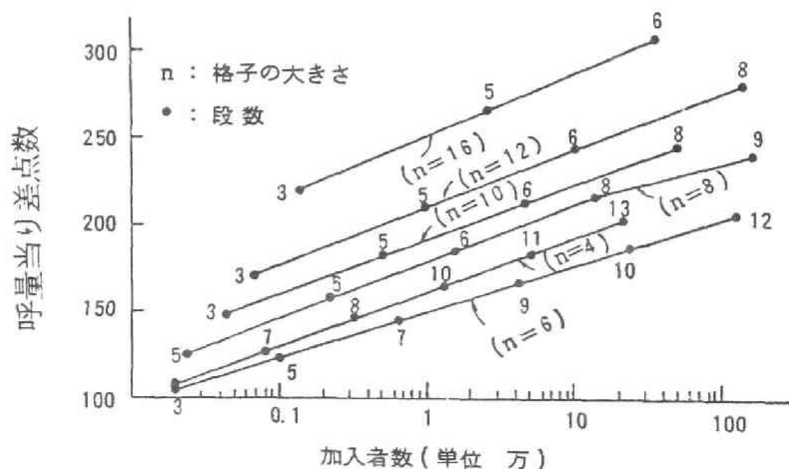


図 2.2 格子の大きさと呼量当り差点数

電子交換機は電子計算機と同様、プログラムで各動作を指令しているため、空塞を示すメモリ位置の指示や必要なメモリ量の点で有利な2のべき乗をnの値としてとることとして入線数8、出線数8（以下 8×8 と記す）の格子スイッチを基本とすることが多い。我国の大局用電子交換機（D10）では8段、中小局用電子交換機（D20）では6段の、多段の通話路網構成をとっていて、第1段、第2段に 8×8 格子スイッチの複式接続による $8k \times 8$ （k：整数）相当のスイッチを配置する方法が採用されている。例えば図2.3に示すようにスイッチAの出線1,2,...,8とスイッチBの出線1,2,...,8とを複式接続する（複数の出端子を同一出線につなげる）ことにより 16×8 と等価なスイッチが構成できる。

しかし加入者の呼量は日毎、時間毎に変動しており、スイッチ当りの収容入線数nが少ない程、スイッチ当りの呼量変動は大きくなる。通常、通話路網の内部輻輳率（出線あきにも係らず呼損となる確率）は集線を行ったスイッチの呼損率の影響が大きいため、スイッチ毎の負荷が不均衡になると収容替え等によりスイッチ間の負荷の均衡化を図る方法を行っている。しかし、スイッチ毎の負荷はスイッチ数がふえると測定が大変なため、たまにしか測定されず、スイッチ毎の日毎の負荷変動があまり大きい場合、測定されたスイッチ当りの呼量は非常に大きな誤差を持っていることになる。そこで安易に収容替えを行うとその収容替えを是正するためにまた収容替えが必要となったり、収容替えをしないためにスイッチ間の呼損率に大きな差がでたりする。また常時スイッチ毎の負荷が把握で

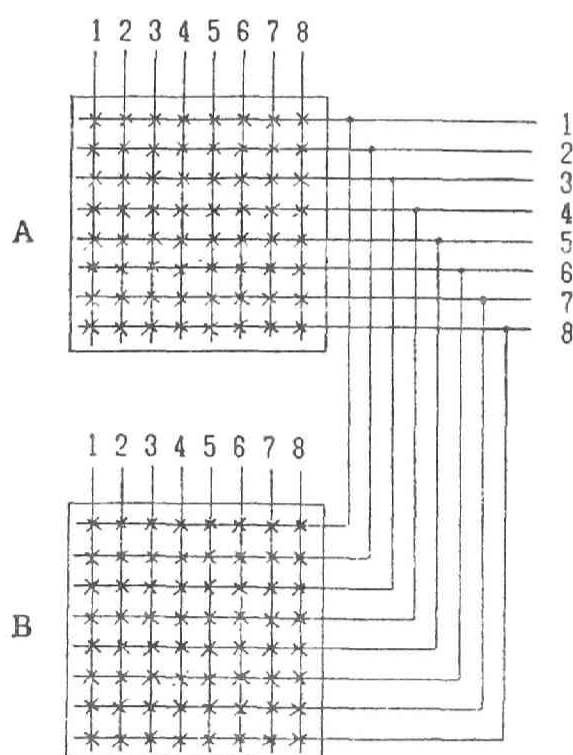


図2.3 2個の 8×8 格子スイッチの複式接続

きるとしてもスイッチ毎の日毎の負荷変動が大きければ収容替えすべきかどうかの判断に迷う。このため、負荷変動を意識しなくてもよいスイッチサイズが目安が示されれば測定にかかる費用を節約できるばかりでなく、収容替えの費用も必要なくなる。

そこで節2.2 では先ずスイッチサイズの変更だけでは対処できないスイッチ内の入線の負荷不均衡の影響を解析する。節2.3 では実測データを分析し、スイッチ間の負荷不均衡の程度を明らかにする。節2.4 では、節2.2,節2.3 の結果に基づき負荷変動を意識しなくてもよいスイッチサイズを検討する。

2.2 スイッチサイズと呼損率

本節では、先ず各入線の負荷が一樣な場合のスイッチサイズと呼損率の関係を示し、次いで各入線の負荷が一樣でなくなると呼損率がどのような影響を受けるかを示す。また、その対処案も示す。

(1) 各入線の負荷が一樣な場合

どの入線も同程度の負荷を発生するものとし、1 空き入線当りの生起呼量を α 、入線数を n 、出線数を m とすると呼損率（呼輻輳率） B は 空き入線 毎の到着間隔分布および保留時間分布に拘らず Engset の損失式

$$B = \binom{n-1}{m} \alpha^m / \sum_{j=0}^m \binom{n-1}{j} \alpha^j \quad (2.1)$$

で与えられることが知られている（[13] の P.255、または [17]：本式の最初の提案は [10]）。

スイッチ全体の生起呼量を A とすると

$$A = n \cdot \alpha / \{1 + \alpha(1 - B)\} \quad (2.2)$$

となる（例えば [11] の P.41 参照）。

表2.1 に、呼損率 B を一定値以下に抑えたときに加え得る 1 出線当りの生起呼量 A/m を示す。同じ集線比（出線数：入線数）に対しては、 m を大きくする程、加え得る呼量がふえるが、その増加率は次第に減少することが分かる。

表2.1 呼損率Bを一定値以下に抑えながら加え得る

1 出線当りの生起呼量 A/m

<div style="display: inline-block; transform: rotate(-45deg);"> <div style="display: inline-block; transform: rotate(45deg);">B</div> <div style="display: inline-block; transform: rotate(-45deg);">m</div> <div style="display: inline-block; transform: rotate(45deg);">n</div> </div>		0.01		0.0001	
		2m	5m	2m	5m
10		0.532	0.475	0.388	0.335
20		0.676	0.627	0.553	0.498
30		0.742	0.700	0.634	0.583
100		0.876	0.852	0.806	0.770
500		0.961	0.953	0.921	0.905
1000		0.979	0.973	0.953	0.935
2000		0.991	0.989	0.965	0.958

(2) 各線の負荷が一樣でない場合

(i) 呼損率の計算式

入線が負荷の異なるK種の群に分けられる場合を考える。入線群iの入線数を n_i 、1 空き入線当りの生起呼量は α_i で与え、

$$X_i = \text{MIN} (n_i, m - v_i), \quad m : \text{出線数} \quad (2.3)$$

$$v_1 = 0, \quad v_k = j_1 + j_2 + \dots + j_{k-1} \quad (k \geq 2)$$

とおくと、同時接続数が j_1, j_2, \dots, j_K である確率 $P(j_1, j_2, \dots, j_K)$ は空き入線毎の到着間隔分布および保留時間分布に拘らず

$$P(j_1, j_2, \dots, j_K) = \frac{\prod_{i=1}^K \binom{n_i}{j_i} \alpha_i^{j_i}}{\sum_{j_1=0}^{X_1} \sum_{j_2=0}^{X_2} \dots \sum_{j_K=0}^{X_K} \prod_{i=1}^K \binom{n_i}{j_i} \alpha_i^{j_i}} \quad (2.4)$$

で与えられる。

入線群 i に生じた呼が各入線群の同時接続数 j_1, j_2, \dots, j_K に出合う確率 $b_i(j_1, j_2, \dots, j_K)$ は X_i を式(2.3) で定義すると

$$b_i(j_1, j_2, \dots, j_K) = \frac{(n_i - j_i) \cdot \alpha_i \cdot P(j_1, j_2, \dots, j_K)}{X_i \sum_{j_i=0}^{n_i-1} (n_i - j_i) \cdot \alpha_i \cdot P(j_1, j_2, \dots, j_K)}$$

$$= \frac{\binom{n_i-1}{j_i} \alpha_i^{j_i} \prod_{k=1, k \neq i}^K \binom{n_k}{j_k} \alpha_k^{j_k}}{\sum_{j_1=0}^{X_1} \sum_{j_2=0}^{X_2} \dots \sum_{j_K=0}^{X_K} \prod_{i=0}^K \binom{n_i-1}{j_i} \alpha_i^{j_i} \prod_{k=1, k \neq i}^K \binom{n_k}{j_k} \alpha_k^{j_k}} \quad (2.5)$$

で与えられる。従って入線群 i に生じた呼が出線全話中に遭遇する確率すなわち入線群 i の呼損率 B_i は

$$B_i = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_K=m} b_i(j_1, j_2, \dots, j_K)$$

$$= \frac{\sum_{j_1+j_2+\dots+j_K=m} \binom{n_i-1}{j_i} \alpha_i^{j_i} \prod_{k=1, k \neq i}^K \binom{n_k}{j_k} \alpha_k^{j_k}}{\sum_{r=0}^m \sum_{j_1+j_2+\dots+j_K=r} \binom{n_i-1}{j_i} \alpha_i^{j_i} \prod_{k=1, k \neq i}^K \binom{n_k}{j_k} \alpha_k^{j_k}} \quad (2.6)$$

で与えられる。入線群 i に加わる呼量を A_i とすると式(2.2)と同様の

$$A_i = n_i \cdot \alpha_i / \{1 + \alpha_i(1-B_i)\} \quad (2.7)$$

または

$$\alpha_i = \frac{A_i}{n_i} / \left\{ 1 - \frac{A_i}{n_i} (1-B_i) \right\} \quad (2.8)$$

なる関係が成立する。(以上は[13]の節6.1.2, [15], [16], [17]などに述べられている。)

(ii) 呼損率計算アルゴリズム

入線群数 $K = 2$ の場合、

$$X_1 = \text{MIN}(n_1, m), \quad X_2 = \text{MIN}(n_2, m - k_1)$$

とおくと、式 (2.4) は

$$P(j_1, j_2) = \frac{\binom{n_1}{j_1} \binom{n_2}{j_2} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2}}{\sum_{k_1=0}^{X_1} \sum_{k_2=0}^{X_2} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2}} \quad (2.9)$$

$$\text{但し、} \quad X_1 = \text{MIN}(n_1, m), \quad X_2 = \text{MIN}(n_2, m - k_1)$$

となる。 X_1, X_2 を式(2.9) の場合と同じとし、 $X'_1 = \text{MIN}(n_1 - 1, m)$ であるとすると、入線群 1 の平均呼量 A_1 及び呼損率 B_1 は、

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 \sum_{k_1=0}^{X_1} (n_1 - k_1) \sum_{k_2=0}^{X_2} P(k_1, k_2) \\ &= \frac{\alpha_1 \cdot n_1 \left\{ \sum_{k_1=0}^{X'_1} \sum_{k_2=0}^{X_2} \binom{n_1-1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \right\}}{\sum_{k_1=0}^{X_1} \sum_{k_2=0}^{X_2} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2}} \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$B_1 = 1 + 1/\alpha_1 - n_1/A_1 \quad (2.11)$$

で与えられる。式(2.9) の様に二項係数や指数項のある計算では、各項を独立に求めると各項が漸次あふれすることがあるので、漸化式を用いる必要があり、以下で述べる手順を提案する。

$$g(j_1, j_2) = \binom{n_1}{j_1} \binom{n_2}{j_2} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \quad (2.12)$$

$$f(j_1, j_2) = \binom{n_1-1}{j_1} \binom{n_2}{j_2} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \quad (2.13)$$

とおくと

$$f(0, 0) = 1, \quad g(0, 0) = 1,$$

$$f(j_1, j_2) = \frac{n_2 - j_2 + 1}{j_2} \alpha_2 \cdot f(j_1, j_2 - 1), \quad (2.14)$$

$$f(j_1, 0) = \frac{n_1 - j_1}{j_1} \alpha_1 \cdot f(j_1 - 1, 0),$$

$$g(j_1, j_2) = \frac{n_1}{n_1 - j_1} f(j_1, j_2)$$

であり、

$$A_1 = \alpha_1 n_1 \frac{\sum_{k_1=0}^{X_1} \sum_{k_2=0}^{X_2} f(k_1, k_2)}{\sum_{k_1=0}^{X_1} \sum_{k_2=0}^{X_2} g(k_1, k_2)}$$

として先ず A_1 を計算し、それから式(2.11)を使って B_1 を求めればよい。

(iii) 呼損率の特徴

入線群毎の呼損率を与える理論式(2.6)～(2.8)は得られていたが、計算の大変さから入線群毎の呼損率の特徴についてはあまり分析されていない。しかし、(ii)で提案した手順により容易に計算が可能なので、入線群数 $K=2$ の場合の入線群毎の呼損率 B_i ($i=1, 2$) および総合呼損率 B_T

$$B_T = (A_1 B_1 + A_2 B_2) / (A_1 + A_2)$$

の特徴を明らかにし、節2.4での検討に役立つ指針を求めることとする。

入線の負荷が一樣な場合の総合呼損率を B_I と呼ぶことにする。入線群1, 2の入線数 n_1, n_2 の間には $n_1 \leq n_2$ の関係があるものとする。入線の負荷が一樣のとき、総合呼損率 $B_T (= B_I) = 0.001$ となる呼量 $A_T = A_1 + A_2$ が加わった場合に A_T を一定のままで A_2 を変えた時の B_1, B_2, B_T の変化を図2.4～図2.9に示す。このうち図2.4～図2.6は集線比2:1で $n_1=2, 4, 8$ に対する図であり、図2.7～図2.9は集線比3:1で $n_1=2, 4, 8$ に対する図である。 $B_I = 0.01$ となる呼量 A_T を加えることを除いては同様の分析を行い、図2.10, 図2.11に示す。

図2.4から入線数の少ない入線群1の呼損率 B_1 は A_2 の増加に対して単調増加であるが、 $B_1 = B_2 = B_T$ となる A_2 の大きさ A_{2I} (すなわち負荷一樣

な場合の A_2) が 2.31 erl 以上の範囲では増加傾向は鈍くなっている。即ち、 B_1 の A_2 に関する2次の微係数は負である。 A_{2I} 以上で B_2 の A_2 に関する2次の微係数が負であるのは全ての図に共通な特徴である。図2.4～図2.6から、 n_1 が増加すると B_1 も頂点、即ち、最悪呼損率となる負荷($<A_T$)を持つようになる。この傾向は集線比が異なる場合(図2.7～図2.9)及び、 B_I が0.01である場合(図2.10、図2.11)にも存在する。この外の特徴も含めてまとめると、次のような特徴が見られる。

(A) 総合呼損率 B_T は負荷が一樣な場合の呼損率 B_I 以下である。すなわち総合呼損率で評価することにすれば入線負荷が一樣でない方がよいことになる。

(B) 負荷が一樣な場合の A_2 の大きさ A_{2I} を境にして

$A_2 < A_{2I}$ では $B_1 < B_T < B_2$ 、 $A_2 > A_{2I}$ では $B_1 > B_T > B_2$

である。1入線当りの呼量 A_1/n_1 、 A_2/n_2 を使って言いかえると

$A_2/n_2 < A_T/(n_1+n_2) < A_1/n_1$ では $B_1 < B_T < B_2$

$A_2/n_2 > A_T/(n_1+n_2) > A_1/n_1$ では $B_1 > B_T > B_2$

となり、入線当りの負荷の高い入線群の方が呼損率が低くなることが分かる。このことは責任のない(負荷の低い)方が迷惑を受けることを意味し、望ましくない。

(C) B_2 が最大値 $\text{MAX } B_2$ をとる A_2 の大きさを A_{22} とすると

$A_{22} < A_{2I}$ である。

(D) B_1 が最大値 $\text{MAX } B_1$ をとる A_2 の大きさを A_{21} とすると

$A_{21} > A_{2I}$ である。特に $n_1 \ll n_2$ では $A_{21} \rightarrow A_T$ となる。

(E) $\text{MAX } B_1 \geq \text{MAX } B_2$ 。但し、等号は $A_1 = A_2$ のときだけ成り立つ。

(F) $\text{MAX } B_1$ は B_I の高々、50%増し程度である。

負荷の不均衡の悪影響は入線群1(入線数が少ない方)により強く現れている(上記(E)参照)ので、その影響を定量的に把握しやすくするために

MAX B_1 の大きさ、 B_2 、 B_T の大きさを表2.2、表2.3に示す。表中の B_1 の最大値に*印がついているところは B_1 の最大値をとる A_2 の値 A_{21} が(D)で示したように $A_{21} \rightarrow A_T$ であることを示している。これらの表から次のことがわかる。

〔(G) 入線数が大きい程、出線数が小さい程、また n_1 が小さい程、MAX B_1 は大きく、表2.2、表2.3での B_1 の最悪値は B_1 の37%増しである。〕

上記(G)から最小整数集線比2:1で $n_1=1$ の時のMAX B_1 が最悪値となるので、これを評価すればよい。 $n=16$ 、 $m=8$ 、 $n_1=1$ 、 $B_1=0.001$ (即ち、 $A_1+A_2=2.6402 \text{ erl}$)のとき、

$$\alpha_1=0.2136, \alpha_2 \rightarrow 0 \text{ に対して } B_1=0.00153 \text{ (} B_2=B_T=0.000865 \text{)}$$

となる。

ところで、待ち行列数表[14]より、 $B_1=0.002$ と 0.001 のときの加入うる呼量の比 r を求めると

$$\begin{array}{ll} m=8, n=9 \text{ のとき} & r=1.09, \\ & n=200 \text{ のとき} & r=1.11, \\ m=16, n=17 \text{ のとき} & r=1.04, \\ & n=400 \text{ のとき} & r=1.07, \end{array}$$

と m が小さい程、 n が大きい程、 r は大きくなることが分かり、入線負荷の不均衡の影響は全呼量を1割程度、大き目に評価しておけば補償できる範囲であることが分かる。

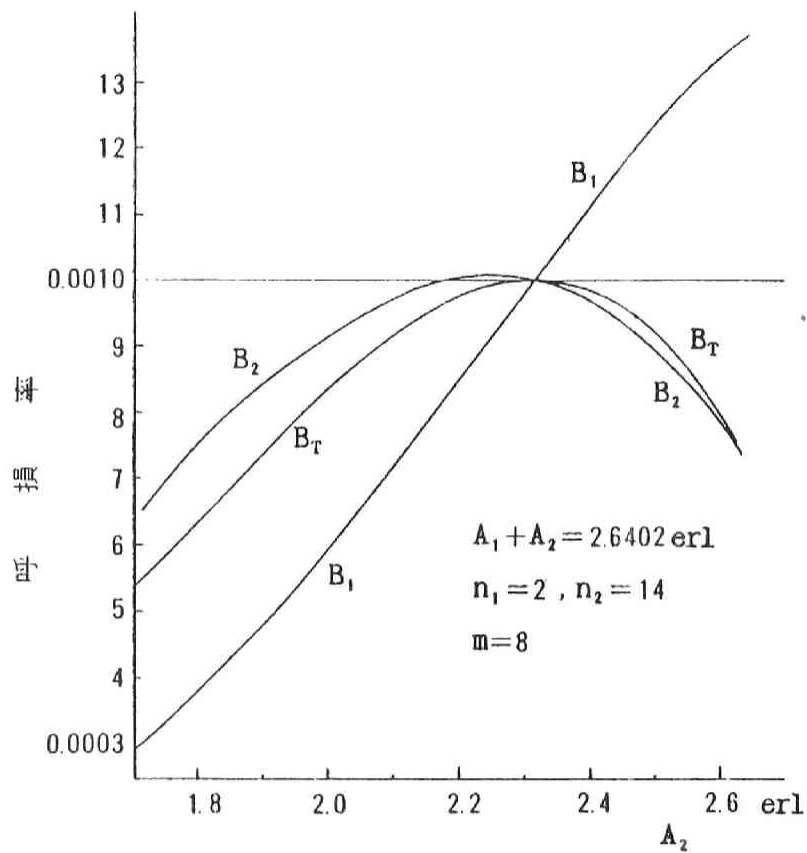


図2.4 負荷が一様でない場合の呼損率
(その1)

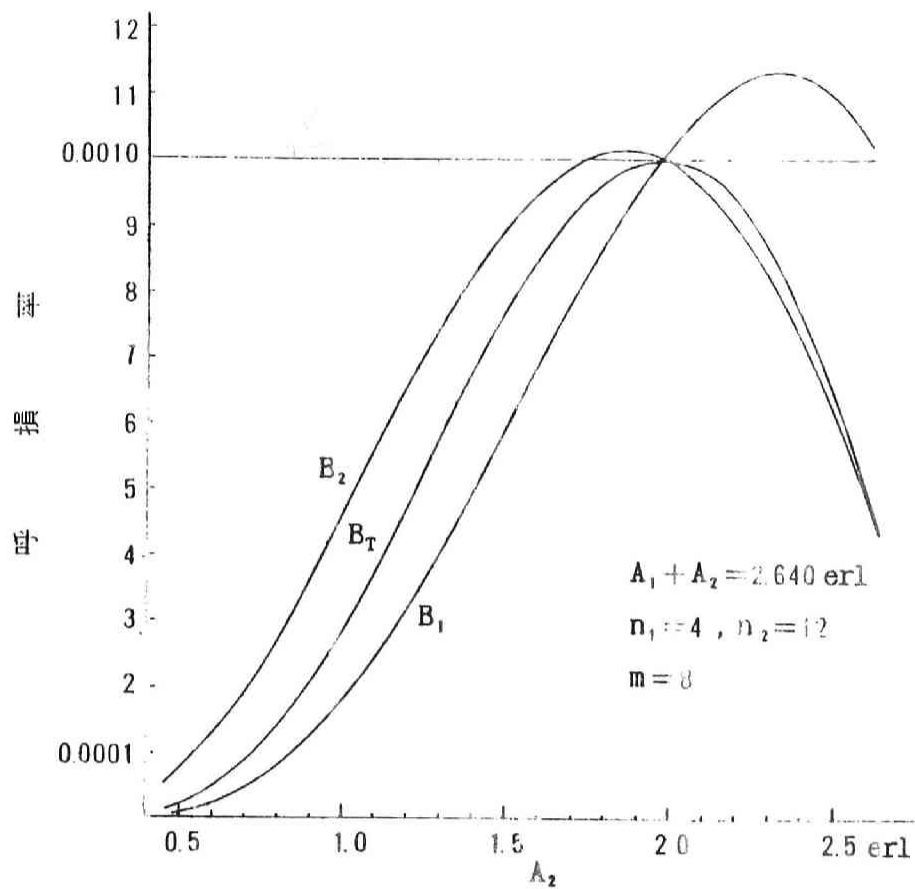


図2.5 負荷が一様でない場合の呼損率
(その2)

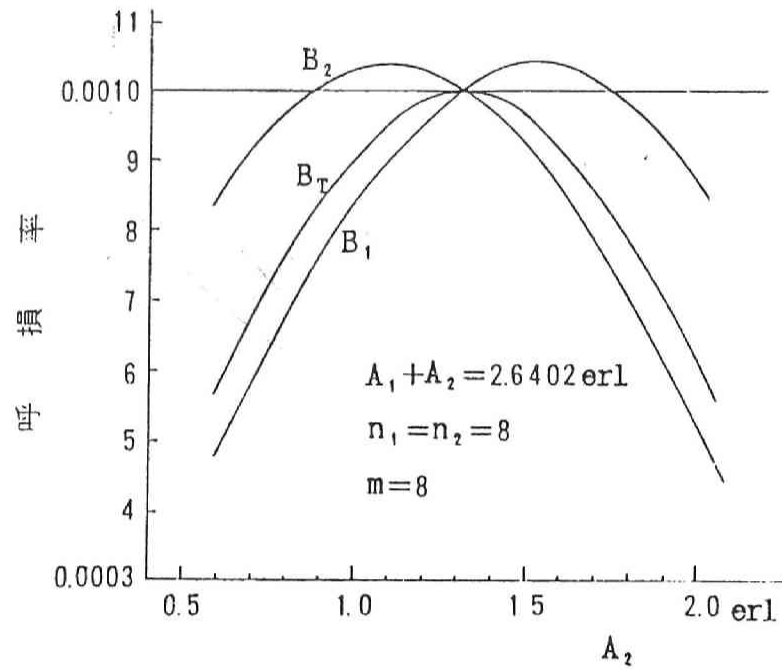


図2.6 負荷が一様でない場合の呼損率
(その3)

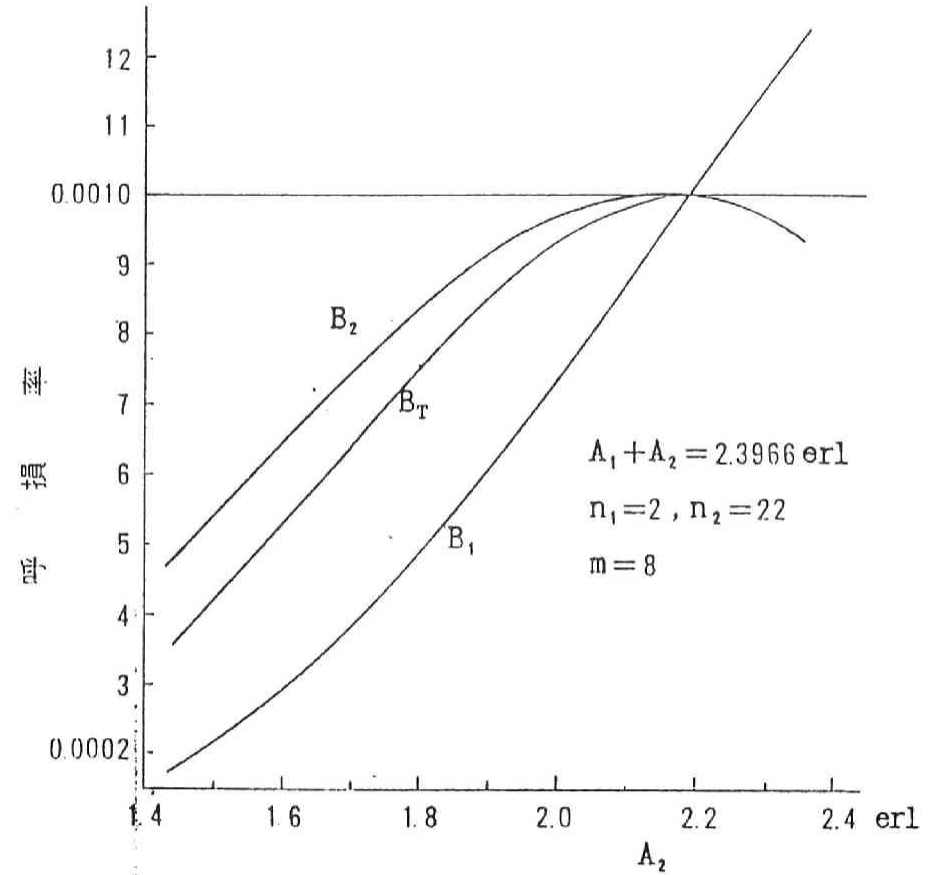


図2.7 負荷が一様でない場合の呼損率
(その4)

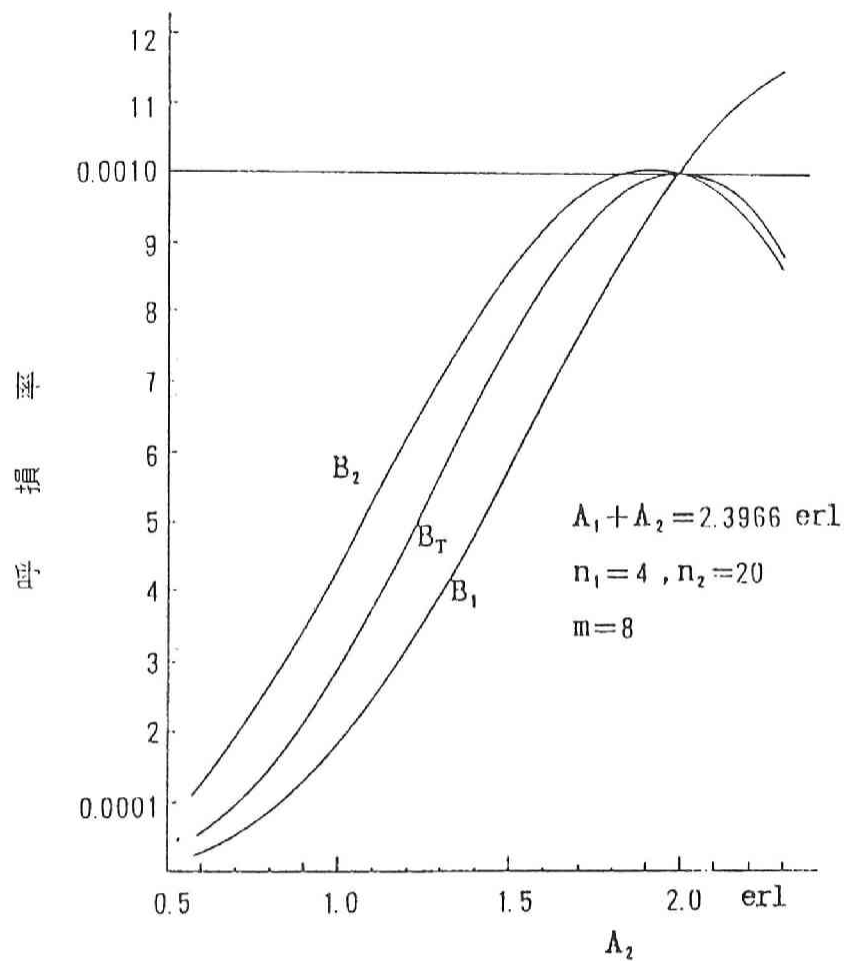


図2.8 負荷が一様でない場合の呼損率
(その5)

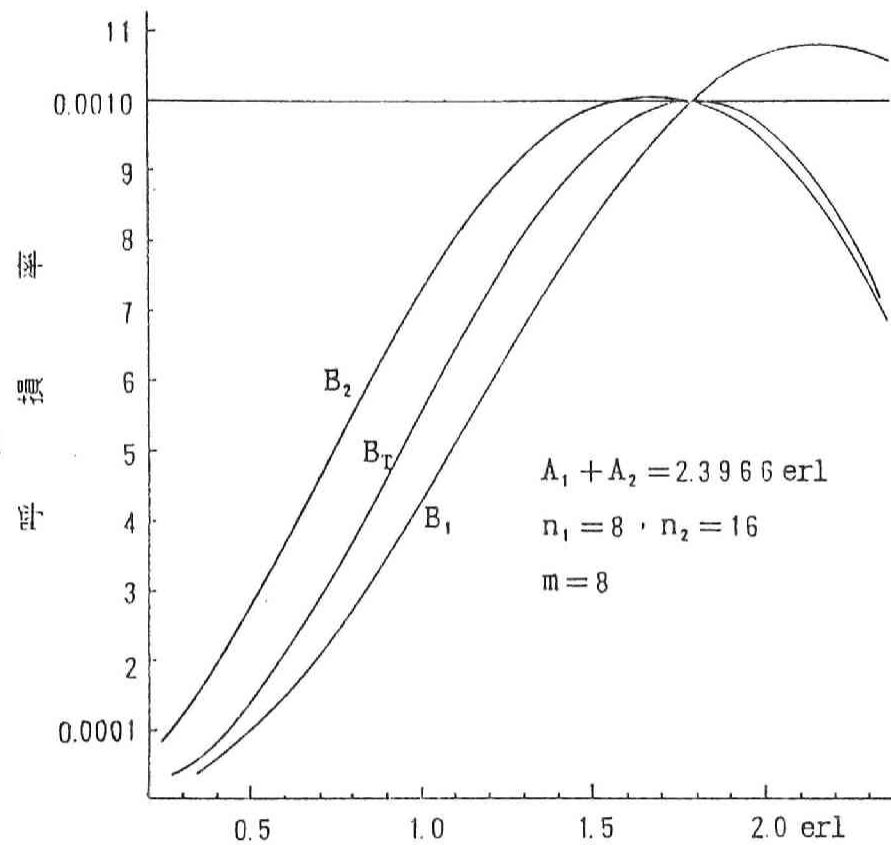


図2.9 負荷が一様でない場合の呼損率
(その6)

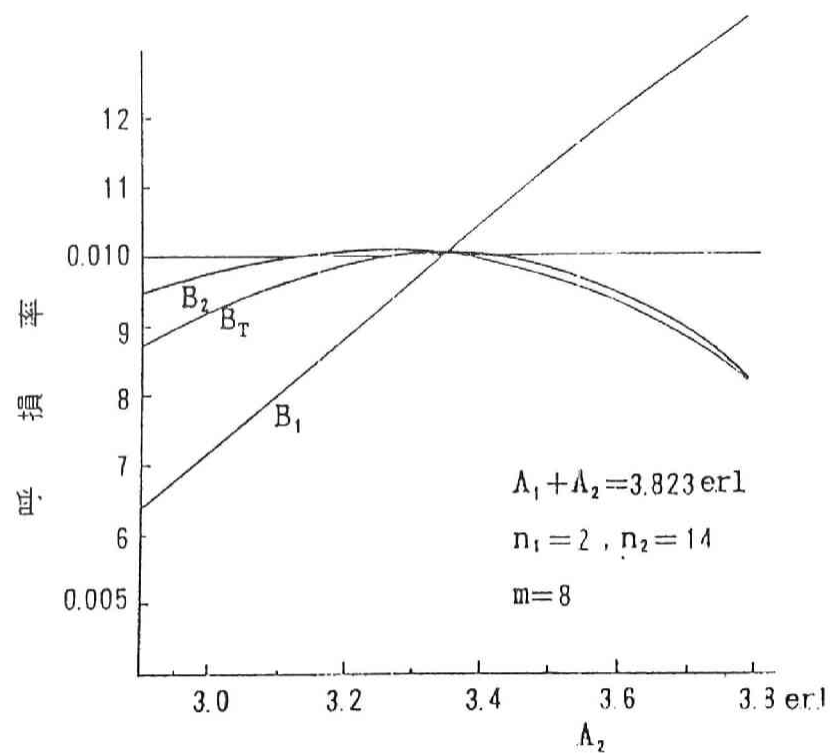


図2.10 負荷が一様でない場合の呼損率
(その7)

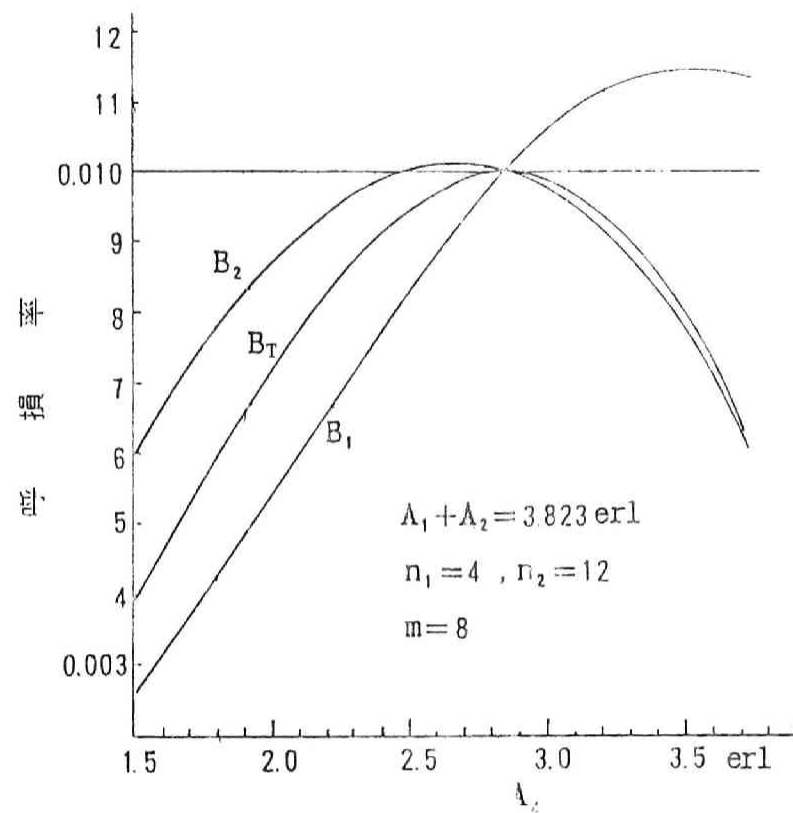


図2.11 負荷が一様でない場合の呼損率
(その8)

表2.2 負荷が異なる2入線群の呼損率 ($B_I = 0.001$)

n_1	n_2	m	A_1+A_2	B_1 の最大值	B_2	B_T
2	14	8	2.6402	0.00137 *	0.00074	0.00075
4	12			113	81	85
6	10			107	86	92
8	8			104	90	96
2	22	8	2.3966	0.00125 *	0.00091	0.00092
4	20			115 *	85	86
6	18			108	82	84
8	16			105	93	95
10	14			104	94	97
12	12			103	94	98
2	30	8	2.2962	0.00120 *	0.00095	0.00095
4	28			115 *	89	89
6	26			109 *	83	83
8	24			106	93	95
10	22			104	94	96
12	20			103	95	97
14	18			102	96	98
16	16			102	96	98
2	30	16	8.0508	0.00131 *	0.00085	0.00085
4	28			115	79	79
6	26			109	86	88
8	24			106	92	94
2	46	16	7.5164	0.00121 *	0.00095	0.00095
4	44			115 *	89	89
6	42			110	89	90
8	40			107	92	93
2	62	32	20.6646	0.00126 *	0.00092	0.00092

n_i : 入線群 i の入線数、 m : 出線数、 A_i : 入線群 i の生起呼量、

A_1+A_2 : 負荷一様な場合に呼損率 B_I が 0.001となる呼量、

B_i : 入線群 i の呼損率、 B_T : 総合呼損率、

*: A_2 の増加に対して単調増加となる B_1

表2.3 負荷が異なる2入線群の呼損率 ($B_I = 0.01$)

n_1	n_2	m	A_1+A_2	B_1 の最大值	B_2	B_T
2	14	8	3.8230	0.0134 *	0.0082	0.0083
4	12			115	74	77
6	10			108	85	90
8	8			104	88	94
2	22	8	3.5409	0.0123 *	0.0093	0.0093
4	20			117 *	85	85
6	18			110	83	84
8	16			106	87	90
10	14			104	89	93
12	12			103	93	97
2	30	8	3.4225	0.0117 *	0.0097	0.0097
4	28			114 *	93	93
6	26			111 *	88	88
8	24			107	91	93
10	22			105	91	93
12	20			104	91	93
14	18			103	92	95
16	16			102	95	98
2	30	16	10.1404	0.0128 *	0.0090	0.0090
4	28			118 *	79	79
6	26			110	85	87
8	24			107	88	91
2	46	16	9.6393	0.0118 *	0.0097	0.0097
4	44			115 *	93	93
6	42			111 *	89	89
8	40			108	87	87
2	62	32	24.0564	0.0121 *	0.0095	0.0095

n_i : 入線群 i の入線数、 m : 出線数 A_i : 入線群 i の生起呼量、

A_1+A_2 : 負荷一様な場合に呼損率 B_I が 0.01 となる呼量、

B_i : 入線群 i の呼損率、 B_T : 総合呼損率、

*: A_2 の増加に対して単調増加となる B_1

2.3 スイッチ当りの呼量変動

節2.2では理論式に基づき入線間の負荷の不均衡の影響を解析した。本節では負荷の不均衡の程度を実測データに基づき解析し、影響を評価する。先ず、(1)ではスイッチサイズと呼量の変動係数との関係を明らかにする。(2)ではスイッチ毎の呼量の変動が測定時点の相違(時間変動)によるものか、スイッチの相違(空間変動)によるものかを明らかにする。(3)ではスイッチ毎の負荷のばらつきがBayes 推定の持つばらつきを縮減効果により改善の余地があるかを検討する。

(1) スイッチサイズと呼量の変動係数との関係

特定の加入者が複数の加入者線を持っていたり、同一交換機内の特定加入者間に大量の電話トラヒックを発生する業務上の関係が存在する場合などの特別な場合を除き加入者毎の呼量は独立と思われる。加入者毎の呼量が独立ならばスイッチ毎の呼量も独立であり、更にk個のスイッチからなるグリッド毎の呼量も独立である。そこで、スイッチiの呼量 X_i は互いに独立で平均 m_s 、標準偏差 σ_s (変動係数 C_s)を持つ分布に従うとする。このとき、k個のスイッチから成るグリッドの呼量 $(\sum_{i=1}^k X_i)$ は、平均 $m_G = k \cdot m_s$ 、標準偏差 $\sigma_G = k \cdot \sigma_s$ (変動係数 $C_G = C_s / \sqrt{k}$)である分布に従う。このことを実データを使って確かめるため大局用電子交換機のある局Aの午前9時~10時のスイッチ毎の呼量を測定してみた結果、スイッチ毎の呼量の平均 m_s 、標準偏差 σ_s 、変動係数 C_s は

$$m_s = 0.571, \sigma_s = 0.380, C_s = 0.665 \quad (2.15)$$

であった。8個のスイッチから成るグリッドを考えると、スイッチ毎の呼量が独立ならば

$$\sigma_G = 8 \sigma_s, C_G = C_s / \sqrt{8} \quad (2.16)$$

の関係が成り立つ。すなわち、スイッチの大きさ(スイッチ当りの入線数)を8倍(1グリッド収容入線数)に拡大すれば呼量の変動係数 C_G はもとの変動係数 C_s の $1/\sqrt{8}$ になる。ところで実測値は

$$m_G = 4.57, \sigma_G = 1.06, C_G = 0.231 \quad (2.17)$$

であり、式(2.15)、(2.16)から推定される σ_G 、 C_G の推定値

$$\sigma_G = 1.07, C_G = 0.235 \quad (2.18)$$

とほぼ等しい。従ってスイッチ毎の呼量の独立性は否定されていない。

(2) スイッチ当りの呼量の時間平均と空間平均の特徴

スイッチ当りの呼量の時間平均と空間平均を比較するため、中小局用電子交換機のある局Bの、土、日曜の3日分を含む合計14日分の32スイッチに関する午前9時～10時のスイッチ当り呼量データ（表2.4、表2.5）について検討する。第*i*日の第*j*スイッチの呼量を a_{ij} ($i=1,2,\dots,14; j=1,2,\dots,32$)とする。また、次の記号を用いる。

$$\text{第 } i \text{ 日スイッチ当り呼量の空間平均 } ES_i = \sum_{j=1}^{32} a_{ij} / 32, \quad (2.19)$$

$$\text{空間分散 } VS_i = \left(\sum_{j=1}^{32} a_{ij}^2 - 32 \cdot ES_i^2 \right) / 31, \quad (2.20)$$

$$\text{第 } j \text{ スイッチの呼量の時間平均 } ET_j = \sum_{i=1}^{14} a_{ij} / 14, \quad (2.21)$$

$$\text{時間分散 } VT_j = \left(\sum_{i=1}^{14} a_{ij}^2 - 14 \cdot ET_j^2 \right) / 13. \quad (2.22)$$

同様に、土、日曜を除く平日のみのデータの時間領域での平均、分散を ET'_j 、 VT'_j で表わす。

(i) 時間平均と空間平均の差の検定

本データは小標本なので、先ず2組の標本の母分散が等しいとの仮説検定を行い、仮説が採択されたものについて母平均が等しいとの仮説検定を行う。

(イ) 等分散の検定の手順

2組の正規母集団からとられた不偏分散 S_1^2 、 S_2^2 に対して $S_1^2 \geq S_2^2$ であれば、

$$F_0 = S_1^2 / S_2^2 \quad (2.23)$$

は母分散が等しいとの仮説のもとで自由度 (n_1-1 , n_2-1) のF分布（但し、 n_1, n_2 はそれぞれの組の標本数）に従うことが知られている。自由度 (i, j) のF分布の上側5%値 [95%値] $F(i, j; 0.05)$ は

表 2.4 スイッチ当り呼量の測定結果 (その1)

スイッチ 番号	第1日 (木)	第2日 (金)	第3日 (土)	第4日 (日)	第5日 (月)	第6日 (火)	第7日 (水)
1	1.106	1.228	0.739	0.561	0.606	0.956	0.194
2	0.622	0.522	0.678	0.294	0.189	0.278	0.111
3	0.294	0.289	0.522	1.111	0.261	0.272	0.683
4	0.689	1.283	2.178	0.261	0.756	0.711	0.583
5	1.178	1.278	1.633	0.372	2.311	1.350	0.839
6	0.650	0.622	1.200	0.150	0.822	0.411	0.911
7	0.878	0.761	0.417	0.456	0.706	0.567	0.367
8	0.611	0.906	0.506	0.672	0.456	1.044	0.511
9	0.467	0.222	0.939	0.172	0.239	0.761	0.539
10	0.450	1.111	1.144	0.189	1.000	0.633	0.533
11	0.206	0.239	0.494	0.361	0.356	0.339	0.294
12	0.428	0.511	0.811	0.211	0.178	0.200	0.228
13	0.222	0.350	0.156	0.517	0.683	0.433	0.450
14	0.122	0.239	0.278	0.111	0.106	1.117	0.500
15	0.528	0.489	0.561	0.283	1.456	0.667	0.900
16	0.900	0.456	0.617	0.222	0.156	0.222	0.256
17	0.922	1.339	1.356	0.450	2.233	0.561	1.617
18	0.133	0.144	0.494	0.611	0.361	0.261	0.400
19	0.761	1.044	0.550	0.472	0.817	1.011	0.644
20	1.356	1.011	1.250	0.194	1.506	0.872	0.828
21	0.256	0.794	0.422	0.261	0.917	0.761	0.528
22	1.067	0.811	0.550	0.261	1.072	0.611	0.494
23	0.722	0.294	0.628	0.500	0.294	0.778	0.856
24	0.100	0.256	0.506	0.450	0.683	0.100	0.128
25	0.167	0.467	0.394	0.417	0.233	0.350	0.128
26	0.278	0.211	1.933	0.250	0.411	0.611	0.972
27	0.528	0.272	0.478	0.067	0.422	0.178	0.211
28	0.206	0.211	0.800	0.422	0.417	0.189	0.278
29	0.267	0.378	0.478	0.322	1.000	0.144	0.189
30	0.228	0.272	0.306	0.167	0.244	0.406	0.144
31	0.211	0.389	0.650	0.206	0.300	0.167	0.361
32	0.033	0.228	0.078	0.278	0.239	0.183	0.050
空間平均	0.518	0.582	0.742	0.352	0.670	0.536	0.492

表 2.5 スイッチ当り呼量の測定結果 (その2)

スイッチ 番号	第8日 (木)	第9日 (金)	第10日 (土)	第11日 (火)	第12日 (水)	第13日 (金)	第14日 (月)	時間 平均
1	0.439	0.361	0.317	0.950	0.261	0.900	1.611	0.731
2	0.278	0.094	0.544	0.356	0.150	0.400	1.194	0.408
3	0.239	0.250	0.300	0.339	0.656	0.217	0.750	0.442
4	1.239	0.906	0.667	1.117	0.961	0.911	0.844	0.936
5	0.917	1.222	1.683	1.511	1.478	0.928	0.939	1.260
6	0.250	0.711	0.622	1.111	0.956	0.789	1.117	0.737
7	0.344	0.533	0.217	1.256	1.044	0.733	0.633	0.637
8	0.617	0.572	0.411	0.750	0.511	0.467	1.217	0.661
9	0.450	0.267	0.489	1.100	0.394	0.328	0.533	0.493
10	0.544	0.572	1.439	0.628	0.983	0.639	1.189	0.790
11	0.250	0.267	0.517	0.167	0.383	0.061	0.322	0.304
12	0.633	0.433	0.578	0.561	0.628	0.411	0.194	0.429
13	0.456	0.317	0.439	0.261	0.789	0.617	1.239	0.495
14	0.072	0.222	0.306	0.200	0.183	0.367	0.711	0.324
15	1.100	0.344	0.344	1.289	0.239	0.800	1.244	0.732
16	0.122	0.183	0.250	0.383	0.578	0.167	0.789	0.379
17	0.706	0.794	0.672	1.061	1.956	0.750	1.661	1.148
18	0.544	0.239	0.350	0.933	0.111	0.056	0.461	0.364
19	0.767	0.522	0.489	0.594	0.967	0.439	0.617	0.692
20	1.117	1.267	0.883	1.372	1.522	1.178	0.594	1.068
21	0.572	1.083	0.600	1.172	0.967	0.861	0.844	0.717
22	0.939	1.261	1.117	0.533	0.561	0.356	0.667	0.736
23	0.544	0.600	0.322	0.472	0.761	0.756	0.800	0.595
24	0.306	0.589	0.639	0.539	0.883	0.400	0.350	0.423
25	0.189	0.183	0.722	0.461	0.428	0.156	0.422	0.337
26	0.183	0.711	0.450	0.283	0.639	0.328	0.161	0.530
27	0.239	0.411	0.261	0.467	0.444	0.744	0.572	0.378
28	0.222	0.400	0.067	0.289	1.517	0.200	0.083	0.379
29	0.739	0.622	0.522	0.622	0.767	0.417	1.039	0.536
30	0.900	0.394	0.461	0.356	0.600	0.294	0.189	0.354
31	0.461	0.522	0.489	0.694	0.528	0.111	0.550	0.403
32	0.139	0.072	0.139	0.028	0.094	0.083	0.083	0.123
空間平均	0.516	0.529	0.541	0.683	0.717	0.496	0.738	0.579

$$\left. \begin{aligned} F(13,31; 0.05) &= 2.051, & F(31,13; 0.05) &= 2.375, \\ F(13,13; 0.05) &= 2.577, & F(31,31; 0.05) &= 1.822, \\ F(10,31; 0.05) &= 2.153, & F(31,10; 0.05) &= 2.695, \\ F(10,10; 0.05) &= 2.978 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

であり、式(2.23)を使って計算される F_0 と式(2.24)で与えられる $F(i, j; 0.05)$ との間で

$$F_0 > F(i, j; 0.05) \quad (2.25)$$

なる関係が成り立てば、有意水準5%で2母分散が等しいとの仮説は棄却され、2組の母集団は異なる母数、即ち、母分散を持つと言ってよい。式(2.25)の関係が成り立たなければ、2母分散が等しいとの仮説は棄却されず、次の、2母平均が等しいかどうかの検定に移る。

(ロ) 母平均の差の検定の手順

2組の標本の標本平均を X_1, X_2 、不偏分散を S_1^2, S_2^2 、標本数を n, m とするとき、母平均が等しいとの仮説の下で

$$t_0 = |X_1 - X_2| / \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2} \cdot \frac{n+m}{nm}} \quad (2.26)$$

は自由度 $(n+m-2)$ の t 分布に従うことが知られている。自由度 i の t 分布の上側5%値 $T(i; 0.05)$ は

$$\begin{aligned} T(44; 0.05) &= 1.680, & T(26; 0.05) &= 1.706, \\ T(62; 0.05) &= 1.670, & T(41; 0.05) &= 1.683 \end{aligned} \quad (2.27)$$

であり、式(2.26)を使って計算される t_0 と式(2.27)で与えられる $T(i, j; 0.05)$ との間で

$$t_0 > T(i, j; 0.05) \quad (2.28)$$

なる関係が成り立てば、有意水準5%で2母平均が等しいとの仮説は棄却され、2組の母集団は異なる母数、即ち、母平均を持つと言ってよい。式(2.28)の関係が成り立たなかった標本対については、2母平均が等しいとの仮説は棄却されず、母平均が等しくないとは言えない。

(ハ) 検定結果

次の3仮説の検定を行う。

A : 第 i 日の空間平均 = 第 j スイッチの時間平均 ($ES_i = ET_j$)、

B : 第 $i1$ 日の空間平均 = 第 $i2$ 日の空間平均 ($ES_{i1} = ES_{i2}$)、

C : 第 $j1$ スイッチの時間平均 = 第 $j2$ スイッチの時間平均 ($ET_{j1} = ET_{j2}$)

仮説Aはスイッチ間の負荷のばらつきは特定スイッチの日毎の負荷のばらつきと同等視できるか、仮説Bは負荷が日毎に異なるかどうか、仮説Cは負荷がスイッチ毎に異なるかどうかを検定しようとするものである。

表 2.4、表 2.5のデータを使って仮説Aの検定例を示す。第1日のスイッチ当り呼量については

$$ES_1 = 0.518, VS_1 = 0.127, \text{標本数} 32$$

第1スイッチの呼量については

$$ET_1 = 0.731, VT_1 = 0.172, \text{標本数} 14$$

であり、 VS_1 、 VT_1 を式(2.23)の S_2^2 、 S_1^2 として用いると

$$F_0 = 1.354$$

となる。これを式(2.24)の $F(13, 31; 0.05) = 2.051$ と比較すると F_0 の方が小さいので等分散の仮説は棄却できない。そこで、母平均の差の定に移り、式(2.26)により t_0 を求めると

$$t_0 = 1.775$$

であった。これを式(2.27)の $T(44; 0.05) = 1.680$ と比較すると t_0 の方が大きいので有意水準5%で2母平均が等しいとの仮説は棄却される。

同様に他のデータ及び仮説について検定した結果を表2.6 に示す。表2.6 から、負荷の日毎の相違(仮説B棄却)は約半数の標本対で認められ、スイッチ間の負荷の相違変動(仮説C棄却)は約2/3の標本対で認められた。また、仮説Aが約2/3の標本対で棄却されたことは特定日の複数スイッチの測定による負荷推定と特定スイッチの複数日測定による負荷推定とが一致せず、エルゴード性がない(時間平均と空間平均は一致しない)ことを示している。以上からスイッチ間には負荷の相違が認められると言える。

表 2.6 仮説検定結果

仮説	全データ		平日データのみ	
	N/M	採択率	N/M	採択率
A	144/448	0.321	117/352	0.332
B	43/91	0.473	30/55	0.545
C	162/496	0.327	156/496	0.315

N : 仮説採択数、 M : データ数

(ii) 平均と標準偏差の関係

図2.12に平均と標準偏差の関係を示す。図2.12 (a) からスイッチ当り呼量の空間平均 ES_i と空間標準偏差 SS_i ($=\sqrt{VS_i}$) の間には

$$SS_i = 0.668 ES_i - 0.015$$

$$\text{即ち、変動係数 } SS_i/ES_i = 2/3 \quad (2.29)$$

の関係が見られる。なお、調査対象とした中小局用電子交換機 (D20形交換機) のスイッチ当り出線数は8で、調査局Bの場合の1スイッチ当り入線数は32である。また、節2.3.1 に示した調査局Aのスイッチ当り出線数は8で、1スイッチ当り入線数は最大40で、実際に使用している入線数は平均 約26である。式(2.27)と式(2.15)から調査局Aと調査局Bのスイッチ当り呼量の変動係数はほぼ等しいことが分かる。スイッチ当り呼量の変動係数は出線数に支配されていて、入線数や集線比にはあまり依存せず、局に係らず約 2/3となると推定されるが、データが少なすぎるので更に調査が必要である。

なお、図2.12 (b) に示すスイッチ当り呼量の時間領域での平均 ET_i と標準偏差 ST_i の関係からは図2.12 (a) のような関係は見られず、ばらつきが大きい。

(3) スイッチ当り呼量の Bayes推定

スイッチ j の負荷の推定値としては通常、スイッチ j の呼量の時間平均 ET_j が

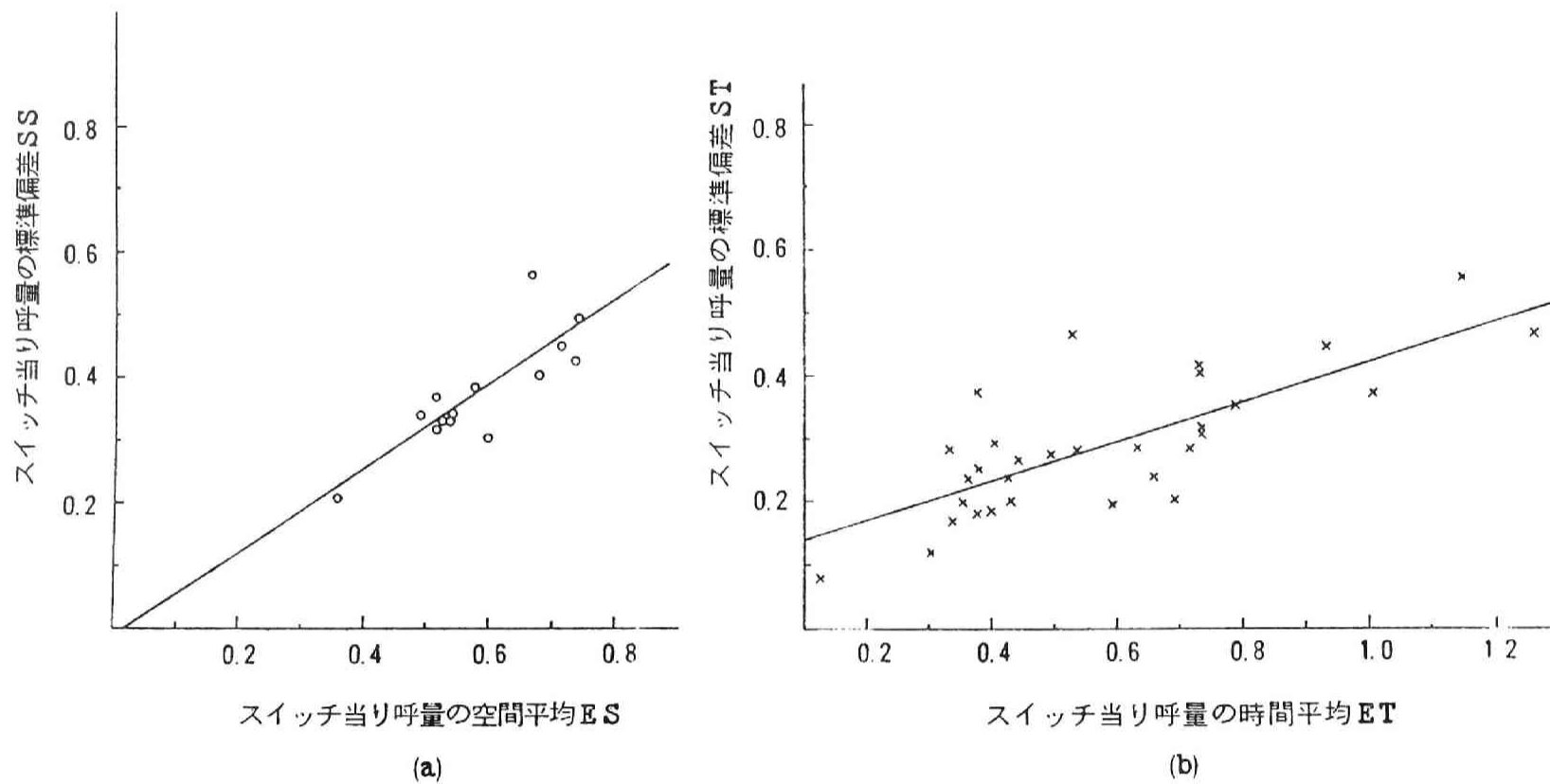


図2.12 平均と標準偏差の関係

用いられる。これに対し、Stein は観測値（ここでは ET_j ）を直接、用いず、観測値に適当に重み付けして全体（全スイッチ）としての平均自乗誤差を最小にする推定量を提案している。^{[18], [19]} この考え方は Bayes 推定量の立場からも支持されている。^[20] ここでは、Stein の考え方に基づく Bayes 推定量が全体平均の方向へのばらつきの縮減効果を持つことを利用して、観測値自身のばらつきよりも推定値のばらつきの方が小さくなる Bayes 推定を試みる。

スイッチ j の負荷 X_j^2 は平均 m_j 、分散 σ^2 の正規分布 $N(m_j, \sigma^2)$ に従い、平均 m_j は平均 μ_0 、分散 σ_0^2 の正規分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ に従うものとする。スイッチ j の負荷の測定値 x_1, x_2, \dots, x_n が得られたときのパラメタ m_j の事後分布は

$$\text{平均 } m_j^B = \{ \sigma_0^2 x_j + (\sigma^2/n) \mu_0 \} / (\sigma_0^2 + \sigma^2/n), \quad (2.30)$$

$$\text{分散 } v_j^B = \frac{\sigma_0^2 \sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} \quad , \text{ 但し、 } x_j = ET_j \quad (2.31)$$

の正規分布に従う。スイッチ j の負荷は平均 m_j のまわりに日毎に変動しているものと考えたと σ^2 は日（時間）変動分に相当し、 m_j は全体平均 μ_0 のまわりにスイッチ間のばらつきを示す分散 σ_0^2 で変動しているものと考えたと σ_0^2 は空間変動分に相当する。そこで σ^2 として式(2.22)の VT_j の平均、 σ_0^2 として式(2.20)の VS_j の平均を用いると

$$\sigma^2 = 0.0944, \quad \sigma_0^2 = 0.1459$$

である。ここで式(2.29)から分かるように、 v_j^B は j に係らず一定値 0.0064 となる。従って変動係数 v_j^B / m_j^B は m_j 、即ち、スイッチ j の呼量の時間平均 ET_j の大きさに依存し、高負荷スイッチについては高精度で、低負荷スイッチに対しては低精度での負荷推定になる。

スイッチ当り呼量の時間領域での平均と変動係数の関係（図2.13）を見ても高負荷スイッチに対して精度が高くなる傾向が認められる。

式(2.30)は個々の測定値を全体平均 μ_0 の方向へ適当な重み付けで縮減することを意味し、Stein の推定量^[18] の考え方と一致している。しかし、本例では σ^2/n が小さく、縮減効果はあまり無くて、スイッチ当り呼量の全体平均である

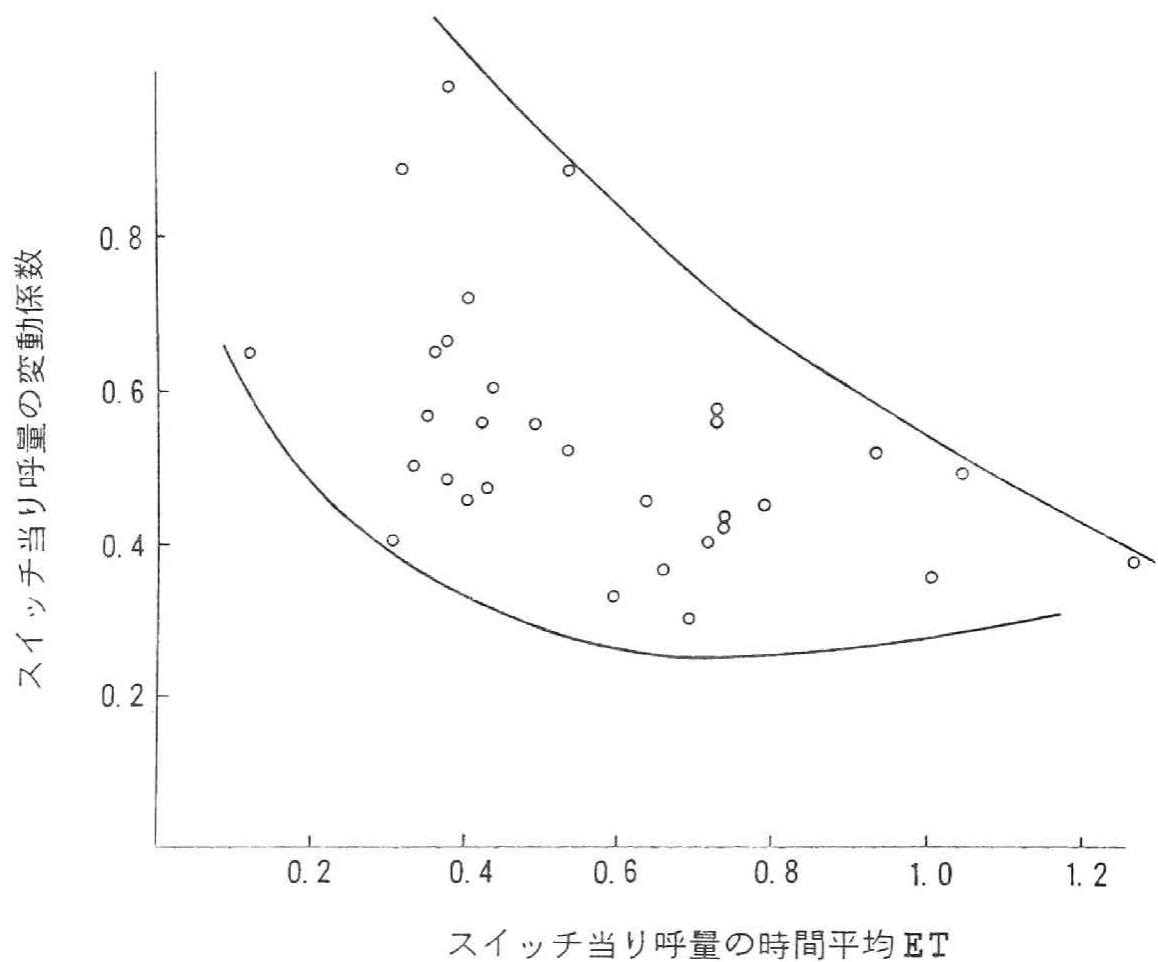


図 2.13 スイッチ当り呼量の時間平均と変動係数

$$\sum_i \sum_j a_{ij} / (14 \cdot 32) = 0.579$$

の方向へ、 $\max_j ET_j = 1.148$ が 1.123 に、 $\min_j ET_j = 0.123$ が 0.144 に変わる程度である。即ち、空間変動の方が日変動よりも大きく、Bayes推定を行った結果でも空間変動分に支配され、縮減効果は発揮されないことを意味し、簡単さの点から観測値 ET_j 自身をスイッチ j の負荷の推定値と考えてよい。

2.4 スイッチサイズと呼量変動

節2.3, (2), (ii) の式 (2.27) で示したように空間領域でのスイッチ当り呼量の変動係数 C_S は $2/3$ と考えてよい。入線の負荷不均衡を補償するためには呼量を1割程度ふやせばよいことを節2.2, (2), (iii) で示した。また節2.3, (1) にグリッド当り呼量の変動係数 C_G はグリッドに収容するスイッチ数 k の平方根 \sqrt{k} に反比例す

ることを示した。従ってk個のスイッチの入線を1個の大きなスイッチに収容すれば、スイッチ間の負荷のばらつきは元のスイッチ間のばらつき $C_S=2/3$ の $1/\sqrt{k}$ になる。入線の負荷不均衡を補償するための呼量増分1割よりもスイッチ間の負荷のばらつき変動係数の方が小さくなるようなkを

$$\frac{2/3}{\sqrt{k}} < 0.1$$

より求めると、 $k > 44.4$ となる。従って、現行のスイッチ当り出線数8を $8 \times 45 = 360$ 程度に拡大したスイッチを採用すればスイッチ間の負荷のばらつきは推定される負荷を1割程度、大き目に見積もる中で考慮されたことになる。

以上は変動係数を1割程度に抑えるという対処案であるが、通常、統計理論で採られることが多い95%の上側信頼区間を1割程度に抑えるという考え方に立てば、呼量が正規分布に従うときには

$$1.65 \times \frac{2/3}{\sqrt{k}} < 0.1$$

によりkを求めればよい。この考え方からは、 $k > 121$ が得られ、スイッチ当りの出線数は1,000程度にする必要があることになる。

測定体制の今後の充実を考慮すると、測定は常時、行われるようになると予想され、測定回数nの増加につれ式(2.28)における日変動分 (σ^2/n) は無視できるので、本節では空間変動分だけを考慮することとしている。

なお、実装単位である1グリッドを構成する出線数は通常64なので、グリッド単位に負荷管理をすると、グリッド当り呼量の変動係数は

$$2/3 / \sqrt{8} = 0.236$$

に低下する。

2.5 むすび

本章では加入者呼量に関する統計解析について述べた。節2.1 では経済性の点で優れている小さな格子スイッチを用いるとスイッチ間の負荷の不均衡が生じやすくなることを指摘した。節2.2 では入線の負荷の不均衡の影響について解析し、負荷を1割程度、大き目に評価しておけばが入線負荷の不均衡の影響は吸収できること

を示した。節2.3 ではスイッチ間の負荷の不均衡を実測データから定量的に評価し、スイッチ間の負荷のばらつきはスイッチ毎の日毎の負荷のばらつきとは別物であることを示した。また、スイッチ当り呼量の変動係数は約 2/3であることも示した。節2.4 では以上の検討を踏まえて入線の負荷の不均衡を意識しなくてもよいスイッチ当りの最小出線数 k について検討し、 $k > 360$ であることを得た。なお、デジタル交換機の 1 LC（集線装置）当り出線数（出チャンネル数）は 480であり、LC間の加入者収容替えは行わなくてよい。

以上の検討では、加入者－集線装置間の距離を考慮していないが、地域により集線装置の規模をあまり大きくすると加入者線長が非常に伸びてしまうことがある。そこで加入者線長を考慮した検討も今後、行う必要がある。

第 3 章 電子交換機の集線方式 [23]～[26]

3.1 ま え が き

電子交換機では通常、必要な容量に応じてネットワークと呼ばれる通話路網の単位を複数個、配備する方法がとられる。中小容量の電子交換機では小束の回線が多いため回線の能率は一般に大容量の電子交換機よりも低い。特に 1 ネットワークで構成される場合には回線能率が低いばかりでなく共通トランク、特殊トランクなどが一定数必要なためにトランクを収容する端子数が不足がちとなる。図3.1 に示す中小局電子交換機（D20形交換機）では 1 TSG 当り64個のトランク（TRK）だけしか収容できず収容位置不足の問題が生じるため、それに対処できる通話路網構成法を検討する。

先ず通話路網の構成に当っては

- (i) 既存の 8×8 格子スイッチを構成部品として使用する
- (ii) 拡張スイッチ付与はオプションとし、オプション付与の基礎部すなわち既存方式に与える影響は無視できるようにする

ことを前提条件とする。

次節では既存の通話路網構成法の問題点を示し、節3.3 ではそれらの問題点を解決する新しい集線形式の提案を行う。節3.4 では新集線形式のトラヒック特性を示す。

3.2 既存の通話路網構成法

交換機の通話路網は回線能率とリンク使用率に応じていろいろな集線比と呼ばれる入線数と出線数の比を実現できることが望ましい。従来は

- (a) 必要な集線比を有する格子を新設計する。例えば集線比3:2 を実現する格子として、図3.2(a)に示すように格子スイッチ(1)の入線(2)の数が12本、出線本、出線(3)の数が8本であるものを新たに製作する。
- (b) 複数の格子スイッチを組合せ、必要な出線数の整数倍の出線を有する格子スイッチ群を構成する。例えば集線比3:2 を実現するため、図3.2(b)に示すように、格子スイッチ(4)の入線(5)の数が8本、出線(6)の数が8本であるものを6個組合せ、入線数×出線数が 24×16 である格子スイッチとして用いる。

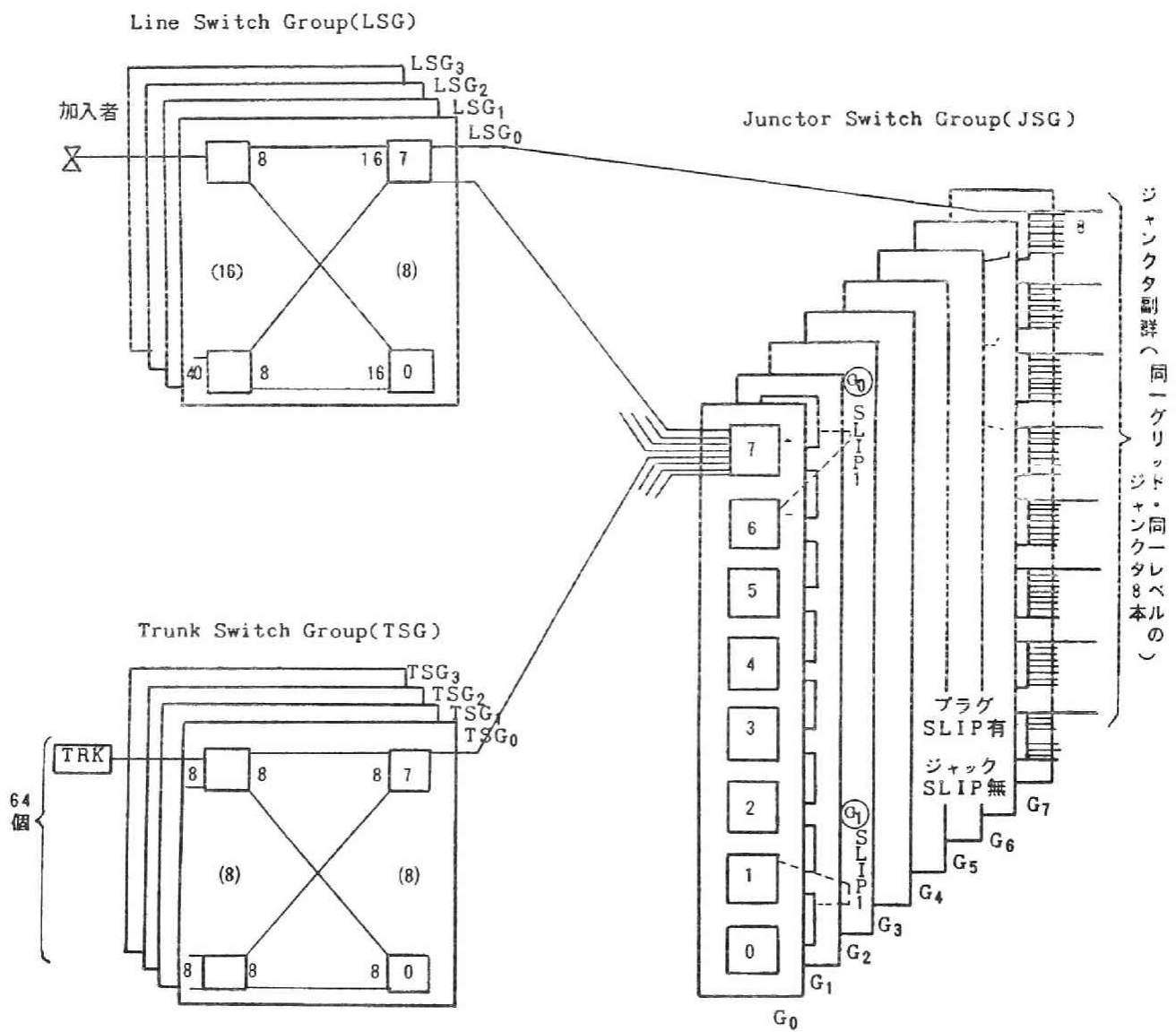


図 3.1 D20 形交換機の通話路網構成

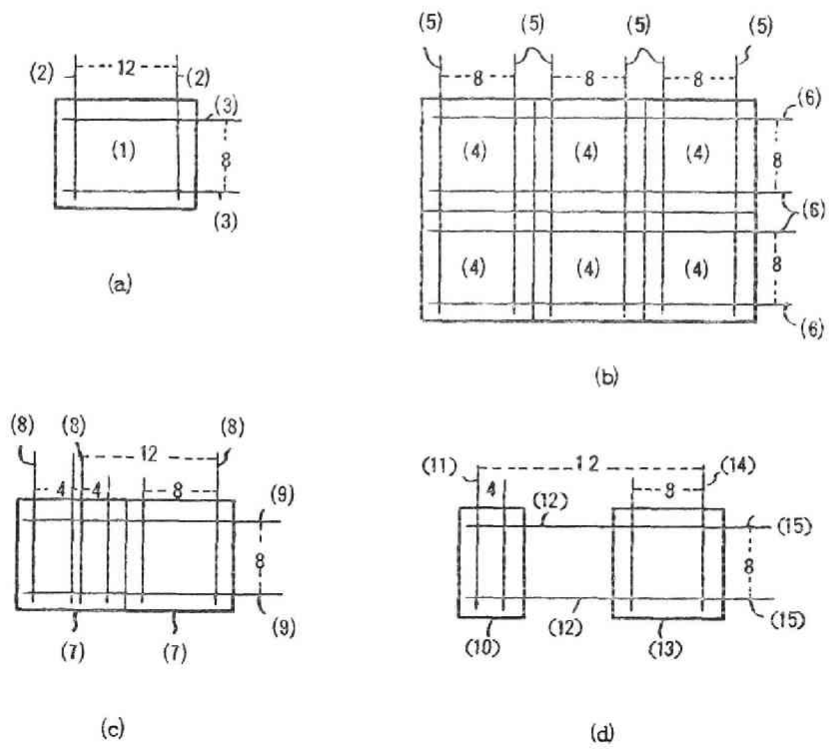


図 3.2 集線比 3 : 2 の実現例

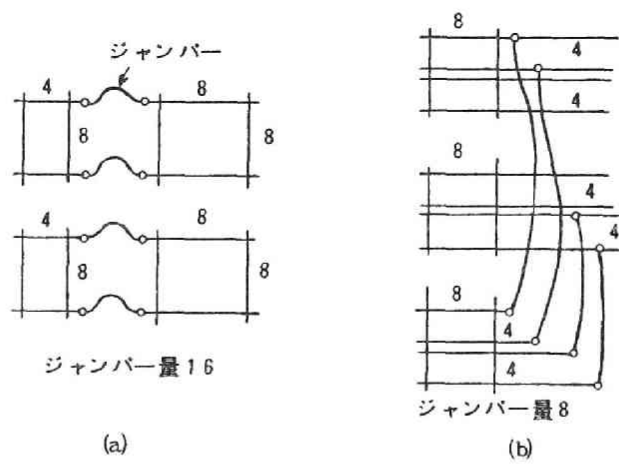


図 3.3 ジャンパー量の比較

(c) 入線の一部を遊ばせる構成にする。例えば集線比3:2 を実現するため、図3.2(c)に示すように、格子スイッチ(7)の入線(8)の数が8本、出線(9)の数が8本であるものを2個組合せ、12×8の格子スイッチとして動作させるようにし、4本の入線を遊ばせる。

(d) 2種類の格子スイッチを組合せた構成にする。例えば図3.2(d)に示すように格子スイッチ(10)の入線(11)の数が4本、出線(12)の数が8本であるものと格子スイッチ(13)の入線(14)の数が8本、出線(15)の数が8本であるものとを組合わせ12×8の格子スイッチを実現する

等の手段が講じられた。

しかし、(a)の手段は経済的および時間的な損失を伴うこと、(b)の手段は2段以上の多段の通話路網に適用する場合に通話路網の呼量容量の増加が差点数の増加の割には小さく、呼量当り差点数の増加は免れず、また1次および2次の格子スイッチ間が完全多重リンクとなるので、リンク整合法の変更が必要であること、(c)の手段は格子スイッチの入線に遊びが出るため不経済であること、(d)の手段は2種類の格子スイッチを用意しなければならないので、予備部品の準備等、保守面での準備等、保守面で経済上の不利があること等それぞれ欠点を有している。その他に、例えば16×8の格子スイッチと8×8の格子スイッチとを同数だけ用意することも考えられるが、その場合には両格子スイッチに於けるサービス（呼損率）が不均等となるので望ましくない。

ここで(a)の手段が比較的取りやすいと考えられる1×8を単位とするSMMスイッチ(Sealed Multi-Contact Matrix)の場合を考えてみる。概念的には12個のSMMスイッチにより12×8の格子スイッチを作ることができるが次のような問題点がある。

(イ) 12×8の固定的な格子スイッチを作成する場合

グリッド板の種類が増加することおよび多段の通話路網での初段と最終段の格子スイッチ以外は8×8の格子スイッチであるため、例えば6段の通話路網を持つD20形交換機での12×8格子スイッチの需要は最大でも全スイッチの1/3である。

(ロ) 12×8の格子スイッチをオプションとして作成する場合

① 8×8スイッチとの差分の部品をオプションで搭載できるグリッド板を

作成する場合

バスセレクションリレーやコネクタ部が冗長になるなどのため 8×8 格子スイッチで設計された交換機 (D10, D20形等) の価格 (基礎分) が増加する。

② 4×8 格子スイッチを持つ別グリッド作成の場合

方法(d) で述べた欠点のほかにジャンパー量は図3.3(a)に示すように図3.3(b)に示す方式の 2倍になる。

(ハ) ソフトのレベル番号が 4ビット構成となり、メモリ量ロス、改造量が多くなる。

これらの問題点を解決するために新しい集線形式の検討が必要である。

3.3 新方式による通話路網構成法

節3.2 で述べた既存方式の問題点を克服するために新方式としては

(a) 1 種類の格子スイッチを複数個、組合せるだけで必要な集線比を実現できること、

(b) 多段の通話路網に適用しても差点数当りの呼量容量の減少がなく、またリンク整合法も不要であること、
(c) 入線に遊びがないように構成できること

を目標とする。

これらの目標を達成するために通話路網は図3.4 のように、複式接続をしない出線と複式接続をした出線とを一定比率で含む第1格子スイッチ群(18)と複式接続をした出線だけを含む第2格子スイッチ群(19)とから構成され、出線の選択方法に工夫が加えられる。図3.4 において、(18)、(19)以外の各記号は

(16): 単位となる格子スイッチ、

(17): 入線、

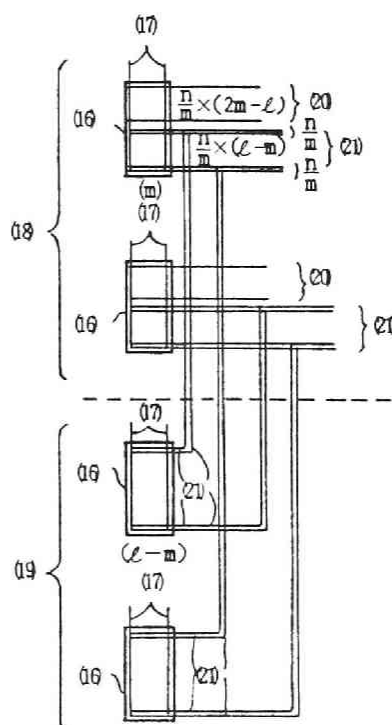


図 3.4 新方式による通話路網構成

(20): 複式接続をしない第1出線群、

(21): 複式接続をした第2出線群

をそれぞれ示す。

新方式は入線数に依存しないため正方形格子スイッチに限定する必要はないが、集線比の表現が容易なので、以下では $n \times n$ で表現される入線数 n 、出線数 n の正方形格子スイッチに限定して説明する。

$n \times n$ の正方形格子スイッチを単位とし、第1格子スイッチ群(18)の各格子スイッチ(16)の第1出線群(20)と第2出線群(21)の出線数の比が一定という条件下では集線比 $l:m$ (ただし $2m > l > m$, m は1より大きい n の正の約数で n に等しい場合も含む。 l は正整数)

の場合に新方式を適用することができる。以下では、格子スイッチを単に格子と呼び、格子スイッチ群を格子群と呼ぶ。

第1格子群(18)に属する各格子(16)は $(l-m) \times n/m$ 本の複式接続される出線を持ち、それらの出線は n/m 本ずつ第2格子群(19)における対応する格子(16)の n/m 本の出線と複式接続される。2 段以上の多段の通話路網においては任意の1次格子から任意の2次格子への接続経路を持っていることを必要とする場合が多く、完全リンク接続すなわち各1次格子から各2次格子に必ず同数のリンクがある場合には1次格子と2次格子との対応づけはラテン方格を用いて行うことができる。例えば各1次格子と各2次格子間が1リンクの場合は2次格子数は n であり、任意の1次格子の出線は n/m 本ずつの m 個の小出線群に分けることができ、2次格子と出線との対応は各1次格子の m 個の小出線群と n/m 個ずつに分けられた m 個の2次格子群との間の対応関係がわかればよい。それには

(イ) m 個の小出線群と m 個の2次格子に同じ m 個の記号 $0, 1, 2, \dots, m-1$ を付ける。

(ロ) 各行、各列とも記号の重複のない記号 $0, 1, 2, \dots, m-1$, からなる m 次のラテン方格を作る。

(ハ) 第1格子群(18)に属する m 個の格子を m 次ラテン方格の各行に対応させ、各行に書かれた記号の2次格子群と接続させる。

(ニ) 第2格子群(19)に属する $(l-m)$ 個の格子の出線は m 次ラテン方格の任意の任意の $(l-m)$ 列に対応させ、各列に書かれた記号の2次格子群と接続させ

る。第2格子群の出線は全て複式接続される出線であり、ラテン方格の第j列が、或る第2格子群の格子の小出線群を示すとする、そのm個の小出線群の第i行の小出線群は第i行に対応する第1格子群の格子の小出線群と複式接続される。

このようにして任意の1次格子は任意の2次格子への接続経路を持つことになり、図3.4に見られる構成は多段の通話路網に適用できる。

新方式における出線の選択は基本的には次のように行われる。

- (ホ) 第1出線群(20)は第2出線群(21)よりも早く選択される。この選択を第1出線群優先選択と呼ぶ。
- (ヘ) 第1出線群あるいは第2出線群内では一般に差点の均等使用を保证するため不定位選択が行われる。

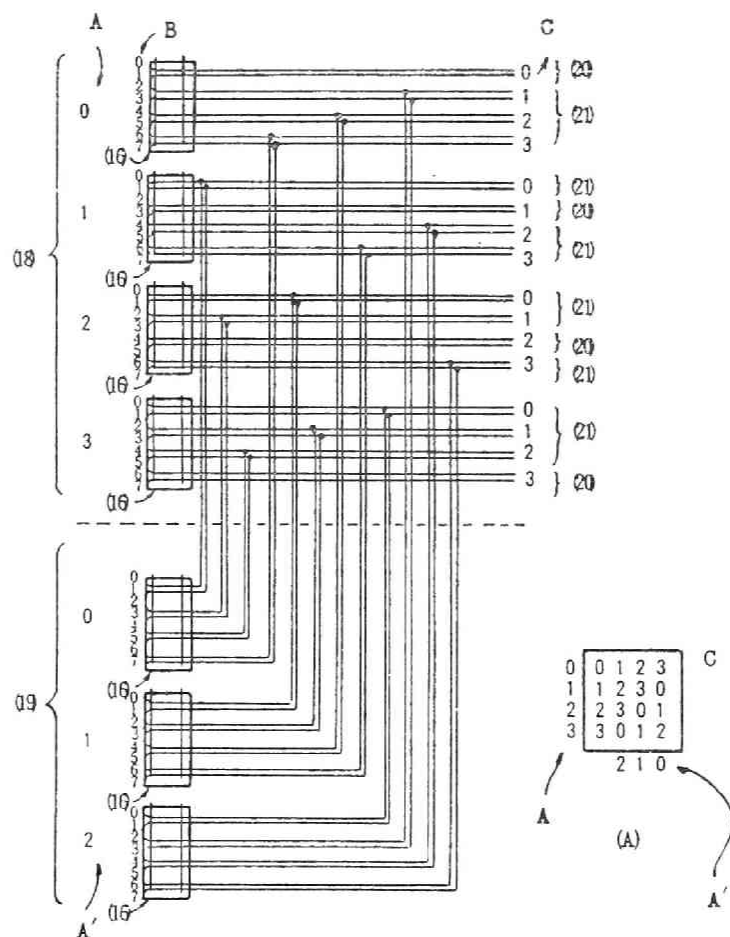


図 3. 5 新方式の実現例 (集線比 7 : 4)

(ト) 差点の均等使用が要求されないときには、第1格子群(18)で早く選択されたものは、第2格子群(19)では遅く選択されるように順位付けをすることにより良好なトラヒック特性が得られる。

次に集線比 7 : 4 及び集線比 3 : 2 の場合における新方式実施例を説明する。図 3.5 は集線比 7 : 4 の場合の実施例であり、図 3.4 の一般図と同じ部分は同じ記号で表わす。本実施例では1次格子の出線と2次格子との対応付けを図 3.5(A) に見られるラテン方格を用いて行っている。この場合、第1格子群(18)における第1出線群(20)に属する出線数と第2出線群(21)に属する出線数との比は 1 : 3 であり、第2格子群(19)の出線は 2本単位で第1格子群(18)の各格子の出線と複式接続されている。第1格子群(18)での第1出線群(20)の収容位置は格子番号0 ではレベル0, 1、格子番号1 ではレベル 2, 3、格子番号2 ではレベル 4, 5、格子番号3 ではレベル 6, 7 というようにずらしていくことにより、すべての2次格子への接続経

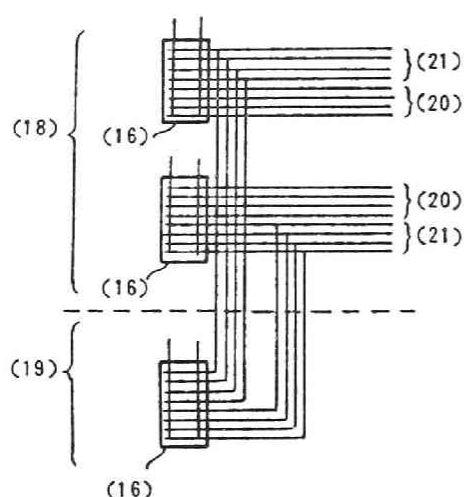


図 3.6 新方式の実現例
(集線比 3 : 2)

路を確保しつつ各2次格子の入線である1次格子の非複式出線数と複式出線数との比を一定にしている。

図 3.6 は集線比 3 : 2 の場合の実施例であり、ここでも図 3.4 と同じ部分は同じ記号で示してある。本実施例は本方式実施例の中で最も簡単なものである。第1次格子群(18)の格子数が 8個の場合には図 3.6 の構成を単位として4 単位から構成されることになり、第2格子群(19)の格子数は 4個になる。

3.4 新方式のトラヒック特性

新方式の通話路網構成をとった場合に、呼が生起した時に出合う同時接続数分布を理論式あるいは1実験当たり約20万呼のシミュレーションにより求める。但し、使用するシミュレータは節 4.4 に示すマルコフ連鎖法によるものである。結果を図 3.7 ~ 図 3.17 に示す。実線および破線はシミュレーション結果であり、実線は第

1 格子群の格子に呼が生じた時に、その格子がアクセスしうる 8 出線に存在する同時接続数の分布、破線は第 2 格子群の格子に呼が生じた時に、その格子がアクセスしうる 8 出線に存在する同時接続数の分布である。1 空き入線当りの生起呼量を α としたとき、 $N \times 8$ の格子に生じた呼が出合う同時接続数が r である確率は Engset の同時接続数分布式

$$b_r = \frac{\binom{N-1}{r} \alpha^r}{\sum_{i=0}^8 \binom{N-1}{i} \alpha^i}$$

で与えられる。入線使用率を α_1 、呼損率を $B (= b_8)$ とすると

$$\alpha_1 = \frac{\alpha (1-B)}{1 + \alpha (1-B)}$$

の関係があり、呼損率 B が小さいときには

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}$$

で近似できる。そこでシミュレーションから得られた入線使用率 α_1 を用いて呼の出合う同時接続数が r である確率 b_r を

$$\frac{\binom{N-1}{r} \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \right)^r}{\sum_{i=0}^8 \binom{N-1}{i} \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \right)^i} = \frac{\binom{N-1}{r} \alpha_1^r (1-\alpha_1)^{N-1-r}}{\sum_{i=0}^8 \binom{N-1}{i} \alpha_1^i (1-\alpha_1)^{N-1-i}}$$

で近似し、それを図 3.7 ～ 3.17 では一点鎖線で示す。

トラヒック特性については折線グラフの形が左肩上がりである程、右肩下がりである程よい特性を持っていると言える。

出線の選択方法としては次の 3 つを考える。

- (1) 第 1 格子群(18)では非複式出線 [第 1 出線群(20)] は複式出線 [第 2 出線群(21)] よりも早く選択 (優先選択) されるが、第 1 出線群内および第 2 出線群内では不定位選択される。第 2 格子群(19)では全出線の間に優先順位のない本単位での不定位選択する。

(II) 第1格子群では第1出線群は第2出線群よりも早く選択され、第1出線群内および第2出線群内では定位選択である。第2格子群では小出線群単位で定位選択し、小出線群内では定位選択である。たとえば集線比3:2の場合に第1格子群の格子1の第1出線群に属する出線番号は0, 1, 2, 3,

“ “ 第2出線群 “ 4, 5, 6, 7,

“ 格子2の第1出線群 “ 12, 13, 14, 15,

“ “ 第2出線群 “ 8, 9, 10, 11

である。第2格子群の格子3は第2出線群に属する出線4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11だけを持ち、

格子1では0→1→2→3→4→5→6→7,

格子2では12→13→14→15→8→9→10→11

の順位に定位選択され、

格子3では小出線群{4, 5, 6, 7}と{8, 9, 10, 11}とが交互に選択され、小出線群内では4→5→6→7, 8→9→10→11の順に選択される。

(III) 第1格子群、第2格子群ともに全出線を本単位で不定位選択する。

出線選択方法(I)をとる場合の実験結果を図3.7～3.10に示す。

“ (II) “ 図3.11～3.13に示す。

“ (III) “ 図3.14～3.17に示す。

全出線を不定位選択する選択方法(III)では図3.14、図3.15に示されるように集線比3:2では第2格子群のトラヒック特性(19')が極度に悪化し、全体としての特性も12×8の格子に及ばない。集線比7:4では図3.16に示されるように選択方法(III)でも第2出線群の比率が高いことから悪影響は小さい。集線比5:4では集線比3:2よりもさらに第2格子群のトラヒック特性は悪化するが第2格子群の格子の比率が低いため全体としてのトラヒックの特性は集線比3:2の場合と同傾向にあることが図3.17よりわかる。

これに対し、選択方法(I)または(II)をとるときは集線比3:2(図3.7、図3.8、図3.11)及び集線比5:4(図3.10)の場合には第1格子群はN×8のスイッチと同等のトラヒック特性を示す。第2格子群はむしろN×8スイッチよりも良好なトラヒック特性を示す。集線比7:4のときに選択方法(I)または(II)(図3.9、図3.12)をとると第2格子群は他の集線比と同様、N×8スイッチより

も良好なトラヒック特性を示し、第1格子群は $N \times 8$ スイッチよりも小さな呼損率（呼が生起したときに出合う同時接続数が8である割合）を持つという点では良好な特性を示しているといえるが、同時接続数分布全体としては $N \times 8$ スイッチの同時接続数分布と形状が異なり、優劣はつけられない。

以上のことから選択方法（Ⅲ）は本方式のような構成をとる場合には複式出線当りの負荷は非複式出線当りの負荷よりも高くなり、複式出線だけにアクセスできる第2格子群のトラヒック特性は悪化し、全体としてのトラヒック特性も悪い方へ引っ張られるということになり、選択方法（Ⅰ）あるいは（Ⅱ）をとる必要性のあることがわかる。（Ⅰ）と（Ⅱ）とではトラヒック特性に差はないが、差点の均等使用が要求されているときには（Ⅰ）の方が望ましい。また（Ⅱ）では定位選択のために選択順序の早い2次格子に負荷が集中することになり、2次格子間のサービスを均衡させるためには別途、工夫が必要である。従って、最も望ましい選択方法は（Ⅰ）であると言える。

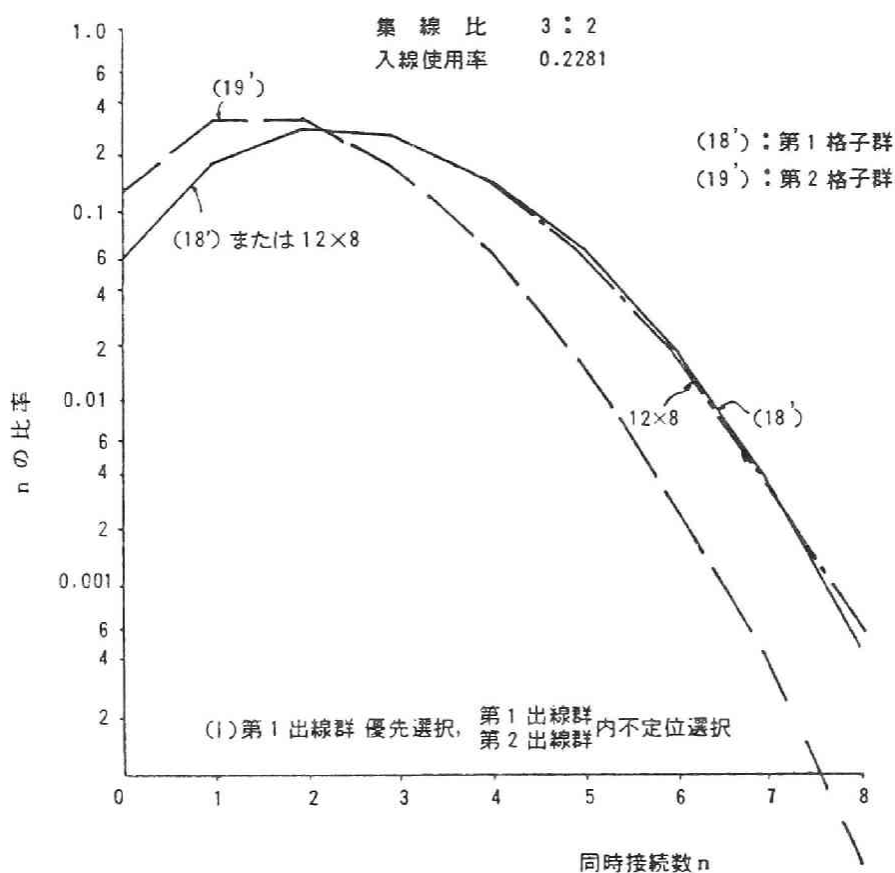


図 3.7 同時接続数分布

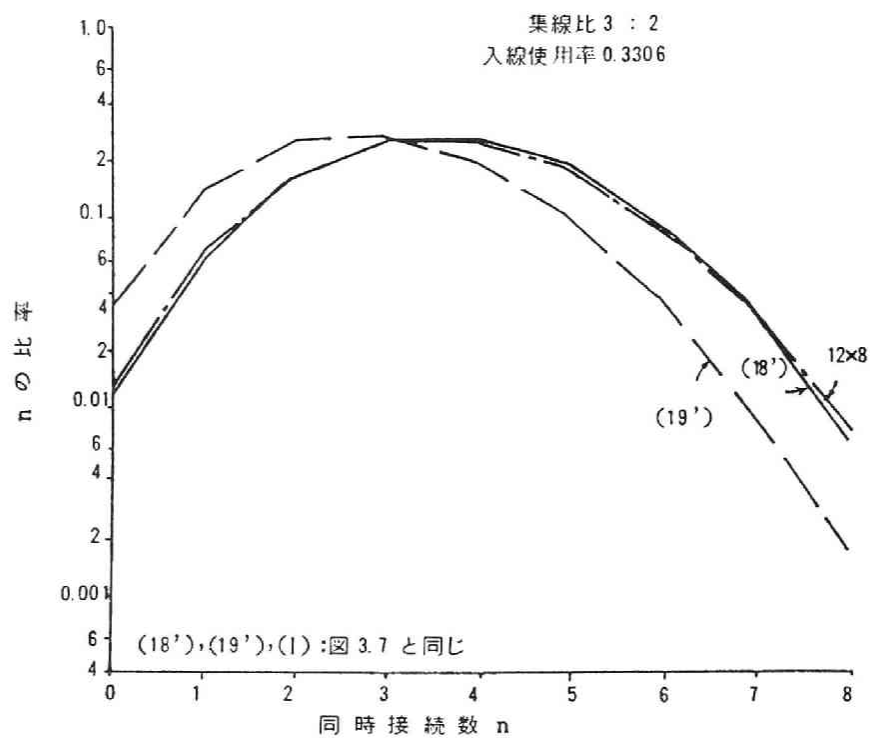


図 3.8 同時接続数分布

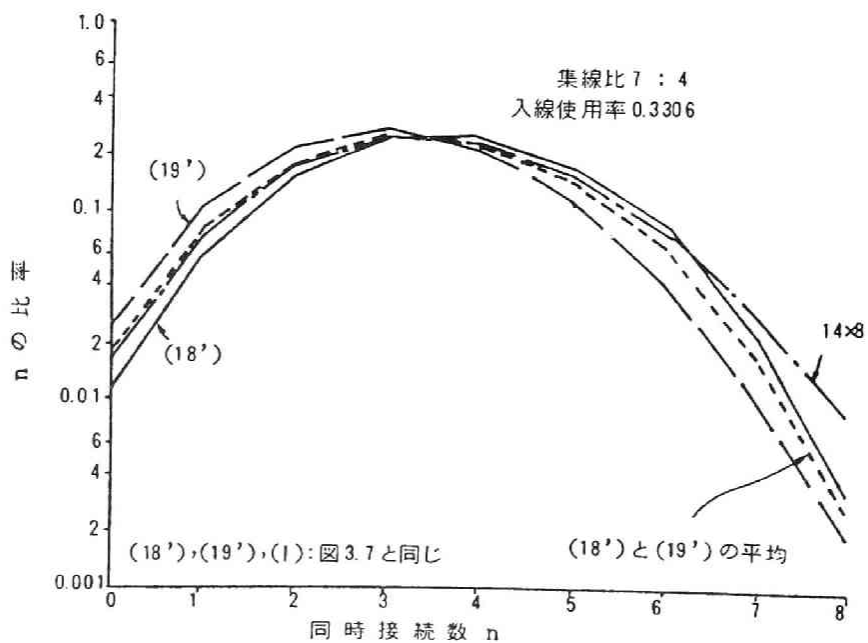


図 3.9 同時接続数分布

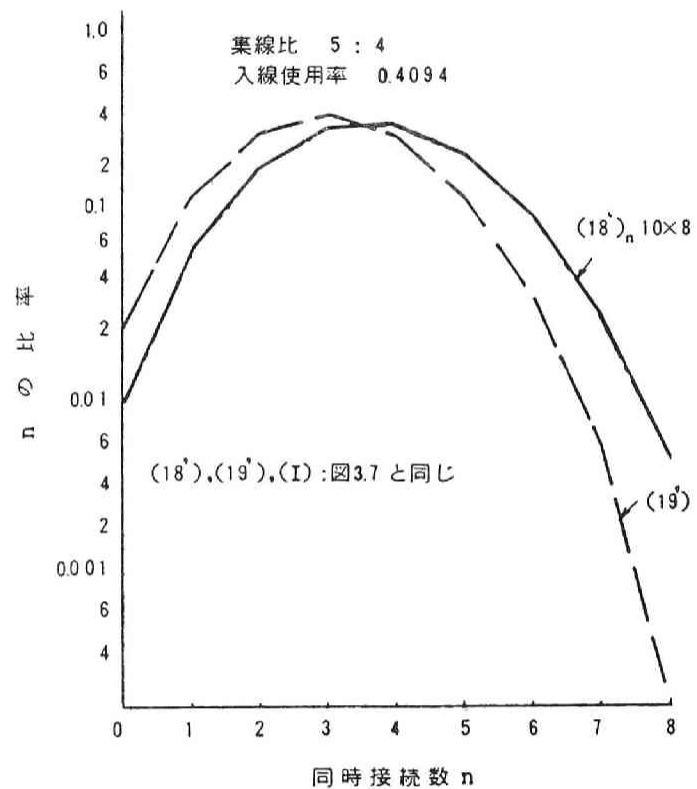


図 3.10 同時接続数分布

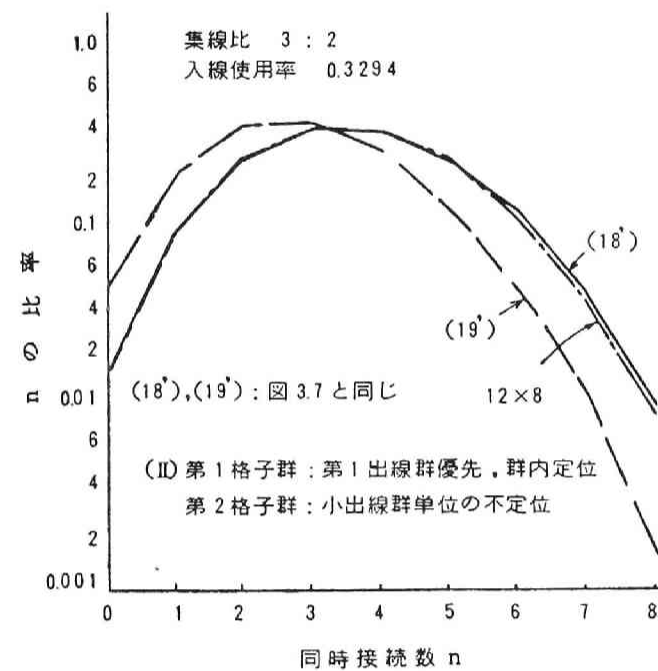


図 3.11 同時接続数分布

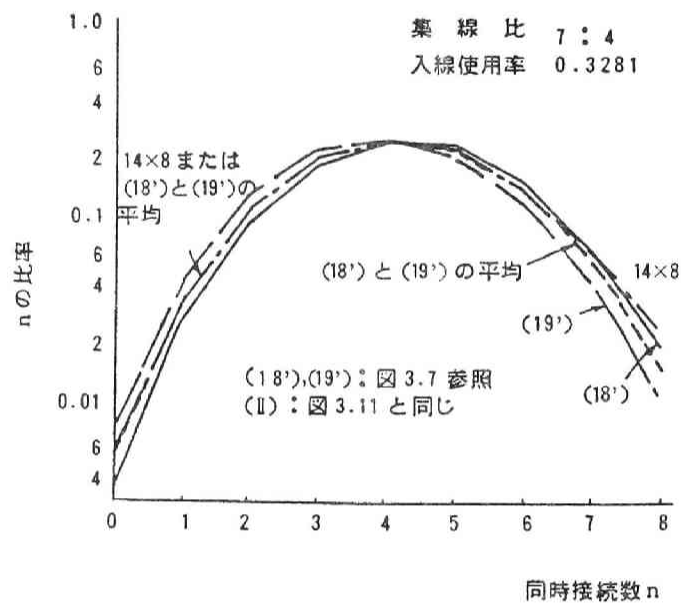


図 3.12 同時接続数分布

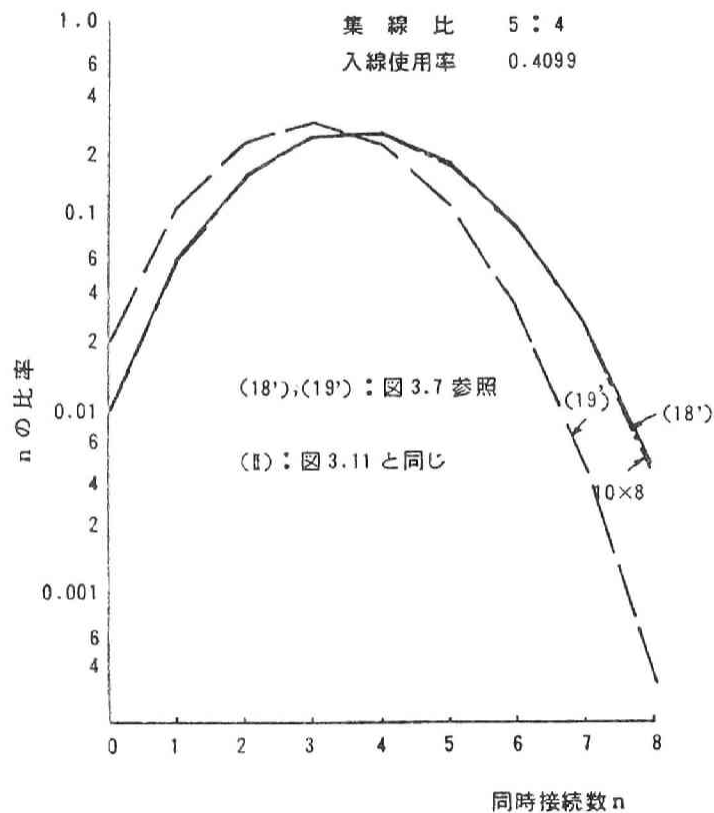


図 3.13 同時接続数分布

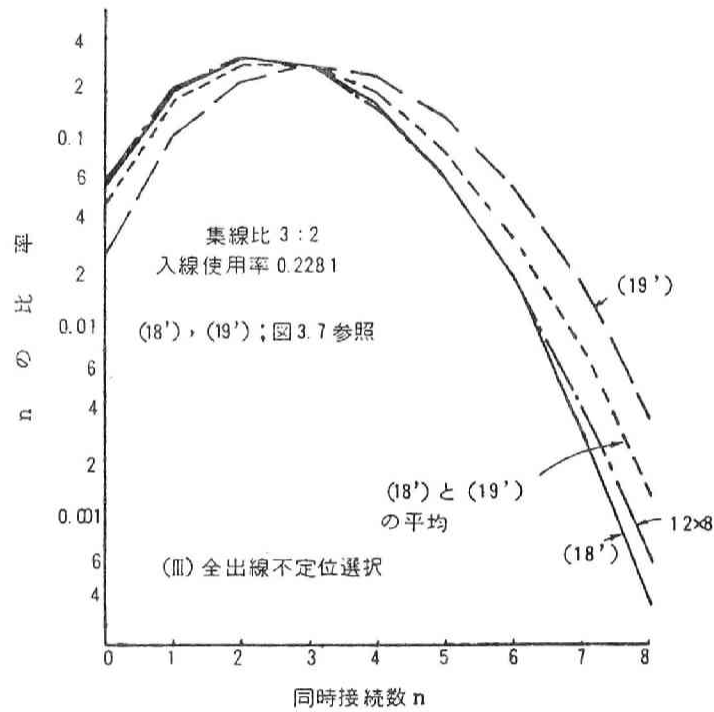


図 3.14 同時接続数分布

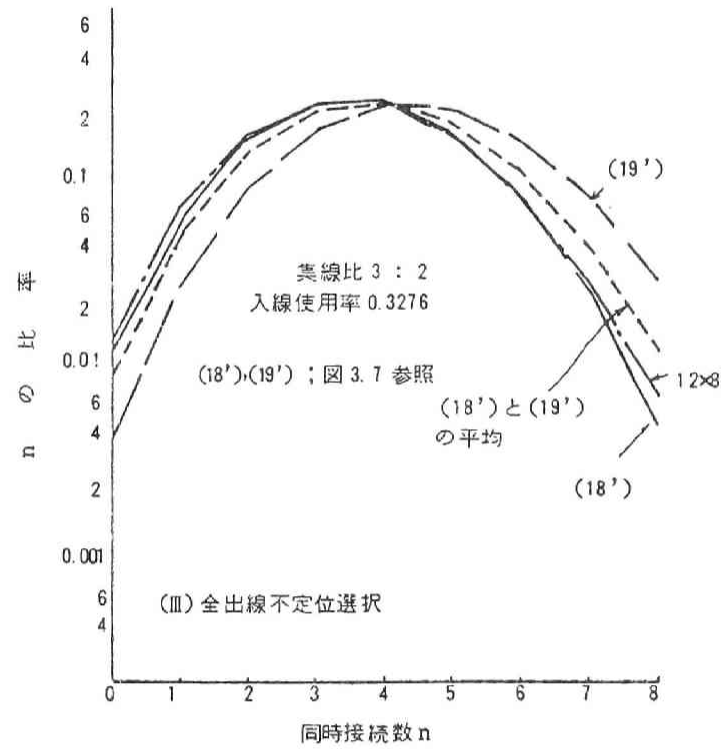


図 3.15 同時接続数分布

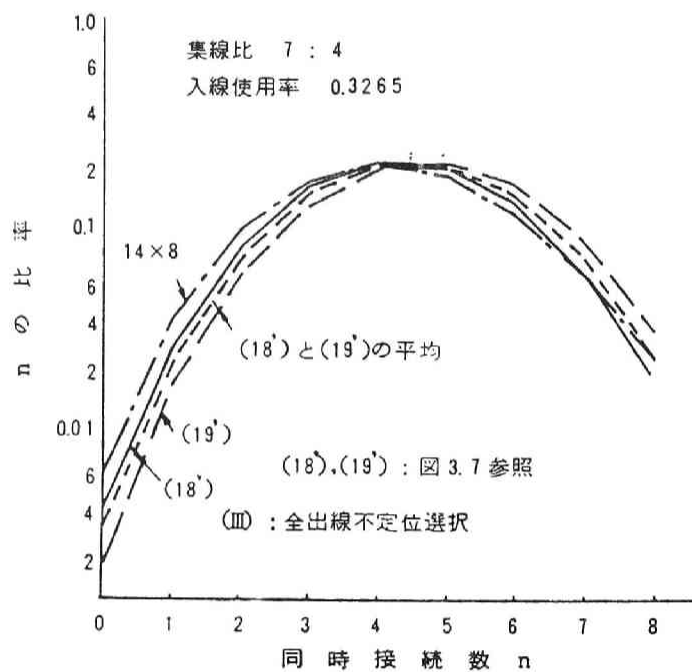


図 3.16 同時接続数分布

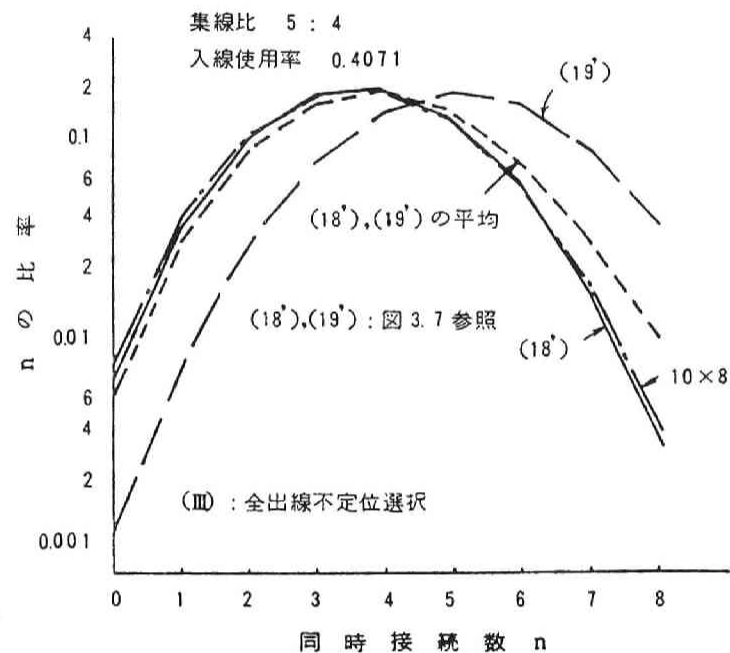


図 3.17 同時接続数分布

選択方法 (I)、(II) では第2格子群の出線に関しては少なくとも小出線群単位で不定位選択することを要求しているが、この理由を図3.18(a)～(c) に示される簡単な例について説明する。

図3.18(a) の場合に格子番号2の格子の小出線群は(00, 01)、(12, 13)の2群であるが、この格子の出線選択が定位選択で $00 \rightarrow 01 \rightarrow 12 \rightarrow 13$ の順である時には格子番号0の出線00, 01は格子番号1の出線12, 13よりも常に格子番号2の格子によって占有されている確率が高いため、格子番号0と1の格子のサービスが不均衡になる。

格子番号2の格子で $00 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 01$ の順に出線が定位選択されれば、この不均衡はある程度解消されるが、定位選択をするためには、たとえば前述した $00 \rightarrow 01 \rightarrow 12 \rightarrow 13$ の順のようにある格子の上から下へとか、下から上へとかのように一定方向である方が制御しやすい。そこで図3.18(b) のような複式接続にする必要がある。しかし、この方式は小出線群が2出線(偶数)から構成されているために可能なのであって、奇数たとえば1出線で構成されている図3.18(c) のような場合にはサービスの不均衡は防げない。これに対して少なくとも小出線群単位で不定位選択を行っていればこのような不均衡は生じない。

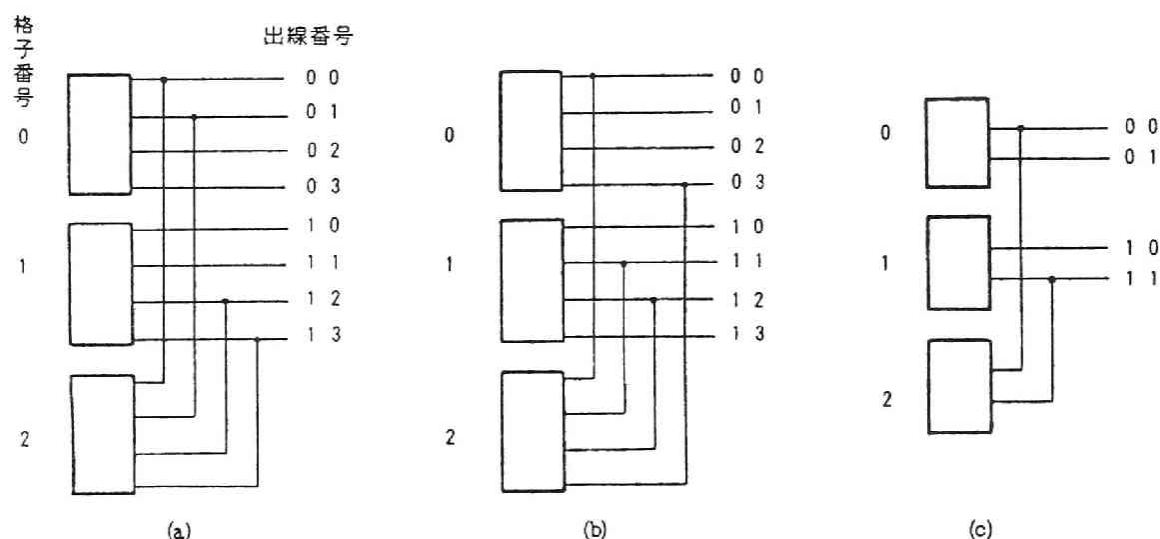


図 3.18 小出線群単位の不定位選択が必要なことを説明するための図

3.5 む す び

本章では、中小容量電子交換機のトランクを収容する通話路網の収容位置拡張方式について節3.2 に既存方式、節3.3 に新しく考案した方式を示し、節3.4 に新方式のトラヒック特性の検討結果を示した。その結果によると新方式は以下の特徴を持っている。

- (a) 新方式を使うことによってベースとなる格子スイッチの組合わせのみで要求される各種集線比を実現できる。新方式は入線数に依存しないが、集線比の表現が容易な $n \times n$ の正方形格子スイッチの場合について適用可能な集線比を示すと、集線比 $l:m$ ($2m > l > m$; m は1より大きい n の正の約数、 l は正整数) に対して適用可能であるといえる。
- (b) 複式接続されていない出線を優先選択することにより、トラヒック特性（リンク能率の向上と、拡張スイッチと基本スイッチのサービスバランス）を改善できる。
- (c) 電子交換機ばかりでなく、クロスバ交換機でも新方式は容易に適用できる。

4.1 ま え が き

第3章では、既存の交換機の変更がなるべく少なくなるような複式結線形式を示した。本章では、そのような制約のない理想的な複式結線形式（グレージング）について考察する。

A.K.Erlangは、「各々の入線群が n 個のトランクのうちの k 個に接続できるシステムに対する理想的なグレージングは、 $\binom{n}{k}$ 個の入線群がすべて異なる組合せの k 個のトランクに接続される場合に生じる」と述べている。^[27] しかし、この入線群数 $\binom{n}{k}$ は $n=9, k=3$ のときでも84であり、実用的な数ではない。

より实际的なものとして、E.C.

Molina が最初に提唱し、No.1 ESS
や DEX-1での転置複式と呼ばれるグ
レージングを経て、No.3 ESSに適用
された Random Slip Multiples
(RSM) と呼ばれるグレージング
がある。E.M.Johnson により、RSM
が良好なトラヒック特性を持つこと
が示されている。^[28] しかし、RS
Mでは、任意の2出線に対して両出
線への接続経路を持つ入線群数 λ を
高々、1になるようにしようとした
が、図4.1 に示すように同じ組合せ
が生じていて $\lambda=2$ の場合が含まれ
ているため一部バランスが崩れてい
る。またアメリカ特許^[29] では、 $n=$
25、 $k=5$ の場合について $\lambda \leq 1$ 以下
の構成が示されている。しかし一般
的な構成法は示されていない。この

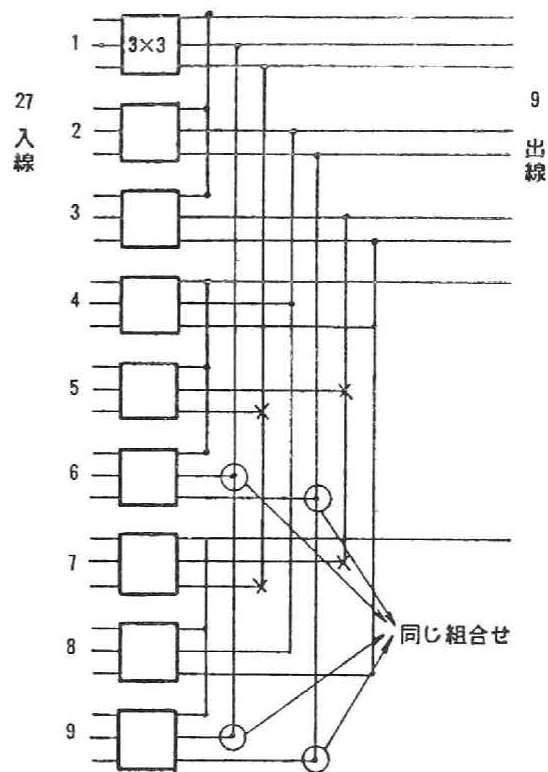
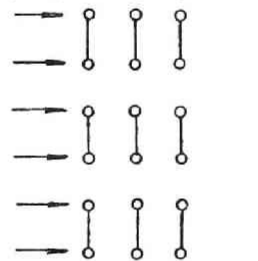
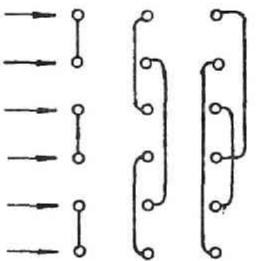
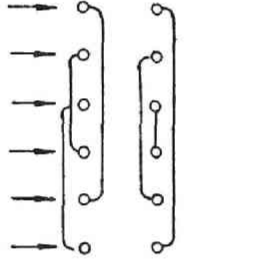
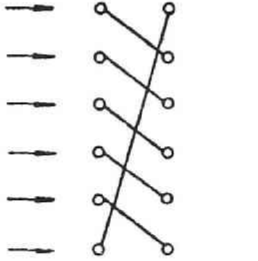
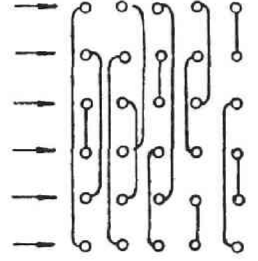
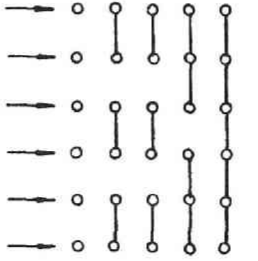


図 4.1 Random Slip Multiples
(文献[28]の Fig.1 と同じ図)

他、計算機による試行錯誤的方法の報告もいくつかある。^{[30] [31]}

本章では総出線数 n が素数の偶数べき乗の場合には、均衡不完備ブロック配置 (Balanced Incomplete Block Designs; 以下、BIBDと略す) を用いて $\lambda \leq 1$ 以下の複式結線形式を作ることができることを示す。ここで、 n が素数の偶数べき乗の場合には均衡不完備ブロック配置自身も容易に作ることができる。^[32] また、表4.1 に示すグレージングの分類^[33] から「すべり (Slip)」ではなく、「飛び複式 (skip)」をとるグレージングであることと均衡不完備ブロック配置を用いることなどから本

表 4.1 グレージングの分類

A (相手入線群は?)	<p>出レベル 1 2 3</p>  <p>Uniform commoning (相手入線群不変)</p>	 <p>Skipped commoning (飛び複式)</p>
B (相手出レベルは?)	 <p>Straight multiple (相手出レベル不変)</p>	 <p>Slipped multiple (すべり結線)</p>
C (複式入線群数は?)	 <p>Homogeneous (複式入線群数一定)</p>	 <p>Progressive (後位ほど複式入線群数大)</p>

論文で述べる結線形式を均衡飛び複式結線形式 (Balanced Skip Multiples : BSMと略記) と呼ぶ。多段の通話路網の初段にグレージングを用いた場合にグレージングの出レベル番号を第2段の差点格子すなわち格子スイッチ番号に対応させれば初段出線の収容が

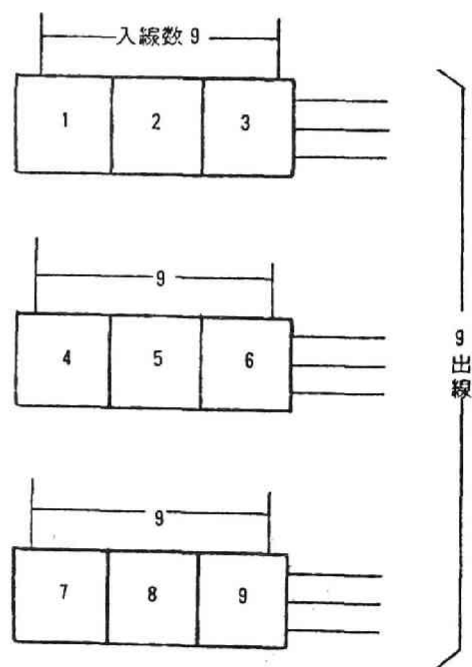


図 4.2 従来方式

容易になるため飛び複式がとられている。

以下では、本章で利用する均衡不完備ブロック配置の作り方を紹介し、その均衡不完備ブロック配置を用いた均衡飛び複式結線形式の構成法について述べる。最後に、多段の通話路網では均衡飛び複式結線形式はどのように適用されるかを述べる。

4.2 均衡不完備ブロック配置 (BIBD) の作り方

本節では均衡飛び複式結線形式を構成する際に利用する均衡不完備ブロック配置 (以下ではBIBDと略記する) の作り方について、既知あるいは既存の結果から容易に類推可能であるが、次節以降の理解を助けるのに特に必要な部分を抽出して述べる。その他の間接的に必要な BIBD に関する説明や用語は付録 1 に示す。

S を素数 p のべき乗とし、 $S=p^m$ とする。次数 S の完全直交ラテン方格系が与えられている (この存在は付録 1 の【補題A1.1】により保証されている) とする。ここで

$$\left[\begin{array}{l} v : \text{品種または処理数} \\ b : \text{ブロック数} \\ r : \text{任意の処理が現れるブロック数} \\ k : \text{ブロックの大きさ} - 1 \text{ ブロックの含む処理数} \\ \lambda : \text{任意の 2 処理が同一ブロックに現れる回数 : 会合数} \end{array} \right]$$

とする。このとき

$$v = S^2, \quad b = S^2 + S, \quad r = k + 1, \quad k = S, \quad \lambda = 1 \quad (4.1)$$

あるいは

$$v = b = S^2 + S + 1, \quad r = S + 1, \quad k = S + 1, \quad \lambda = 1 \quad (4.2)$$

なる BIBD をつぎのようにして作ることができる。

まず式 (4.1) で表されるパラメータを持つ BIBD の作り方について述べる。 L_i ($i=1, 2, \dots, S-1$) を $(S-1)$ 個の互いに直交するラテン方格とすると、 L_i の $S \times S$ の細胞に一連の番号を付して位置 $1, 2, 3, \dots, v (=S)$ とおく。つぎに大きさ $k=S$ のブロックをつぎのように構成する。

- (i) L_1 の各行の位置番号を含むブロックを S 個つくる。
- (ii) L_2 の各列の位置番号を含むブロックを S 個つくる。

(iii) L_i の同じ要素の乗っている細胞に対応する位置番号を含むブロックを S 個つくる。($i=1,2,\dots, S-1$)

これで式 (4.1) で表される BIBD が作られた。

つぎに式 (4.2) で表される BIBD を作る。

(i) ' 項 (i) でつくられた各ブロックに番号 $S^2 + 1$ をつけ加える。

(ii) ' 項 (ii) でつくられた各ブロックに番号 $S^2 + 2$ をつけ加える。

(iii) ' 項 (iii) でつくられた各ブロックに番号 $S^2 + i + 2$ ($i=1,2,\dots, S-1$) をつけ加える。

(vi) ' 新しい番号 $S^2 + 1, S^2 + 2, \dots, S^2 + S + 1$ よりなるブロックをつくる。

これで式 (4.2) で表される BIBD がつくられた。

[例 4.1]

$S = 3$ の場合、完全直交ラテン方格系 L_1 、 L_2 は

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

各細胞に対し

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

なる位置番号を与える。

項(i) により $B_1 = \{1,2,3\}$, $B_2 = \{4,5,6\}$, $B_3 = \{7,8,9\}$,

項(ii)により $B_4 = \{1,4,7\}$, $B_5 = \{2,5,8\}$, $B_6 = \{3,6,9\}$,

項(iii) により $B_7 = \{1,5,9\}$, : L_1 で要素 0 の乗っている位置番号

$B_8 = \{2,6,7\}$, : L_1 で要素 1 の乗っている位置番号

$B_9 = \{3,4,8\}$, : L_1 で要素 2 の乗っている位置番号

$B_{10} = \{1,6,8\}$, : L_2 で要素 0 の乗っている位置番号

$B_{11} = \{2,4,9\}$, : L_2 で要素 1 の乗っている位置番号

$B_{12} = \{3,5,7\}$, : L_2 で要素 2 の乗っている位置番号

が得られる。これは式 (4.1)をみたす

$$v = 9, b = 12, r = 4, k = 3, \lambda = 1$$

なる BIBD である。

番号 10, 11, 12, 13 を加える。

$$\begin{aligned} \text{項(i)'} \text{により} \quad B_1' &= \{1, 2, 3, 10\}, B_2' = \{4, 5, 6, 10\}, \\ B_3' &= \{7, 8, 9, 10\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{項(ii)'} \text{により} \quad B_4' &= \{1, 4, 7, 11\}, B_5' = \{2, 5, 8, 11\}, \\ B_6' &= \{3, 6, 9, 11\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{項 (iii)'} \text{により} \quad B_7' &= \{1, 5, 9, 12\}, B_8' = \{2, 6, 7, 12\}, \\ B_9' &= \{3, 4, 8, 12\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{10}' &= \{1, 6, 8, 13\}, B_{11}' = \{2, 4, 9, 13\}, \\ B_{12}' &= \{3, 5, 7, 13\} \end{aligned}$$

$$\text{項(iv)'} \text{により} \quad B_{13}' = \{10, 11, 12, 13\}$$

これは式 (4.2)をみたす

$$v = 13, b = 13, r = k = 4, \lambda = 1$$

なる BIBD である。

前記、手順(iii) では L_i 毎に同じ要素の乗っている細胞に対応する位置番号を拾い上げる必要があるが、付録 1 の【補題A1.1】に示すラテン方格 L_i と L_{i+1} の関係を使うことにより、1つのラテン方格から手順(iii) に相当するブロックの S 個ずつの集合を順次、作ることがてできる。以上をまとめると次のアルゴリズムが得られる。

〔アルゴリズム 4.1〕

一辺 S (S は素数のべき乗) のラテン方格 L が与えられている場合に、 L の同じ要素の乗っている位置番号で作られる S 個のブロックでできている行列を M_3 とする。均衡不完備ブロック配置を構成するために L と直交するラテン方格から得られる S 個ずつのブロックの集合 M_i ($i = 4, 5, \dots, S+1$) は M_{i-1} が得られると順次、次のようにして求めることができる。

・要素 $1, 2, \dots, S$ はすべての M_i ($i = 3, 4, \dots, S+1$) について同じ位置にある。

・ M_{i-1} で要素 K が乗っている位置と同じ M_i の位置には $K-S > S$ のときに

は $K-S$ が乗る、そうでなければ $(K-2S+S^2)$ が乗る。すなわち、

$$\{(K-2S) \bmod (S^2 - S) + S\}$$

で計算される要素が乗る。ただし、 $A \bmod B$ は A が正整数であれば A を B で割った余りを表わし、 A が負の整数であれば B の整数倍を A に加えた B 未満の非負整数を表わすものとする。

- ・ M_1 は L の位置番号から成る行列である。
- ・ M_2 は M_1 の行と列を入れ替えた行列である。

4.3 均衡飛び複式結線形式 (BSM) の作り方

入線数 3, 出線数 3 の正方形格子スイッチを単位とした総入線数 27, 出線数 9 の構成は通常は節 4.1 に示した図 4.2 のようになっている。その出線の複式結線形

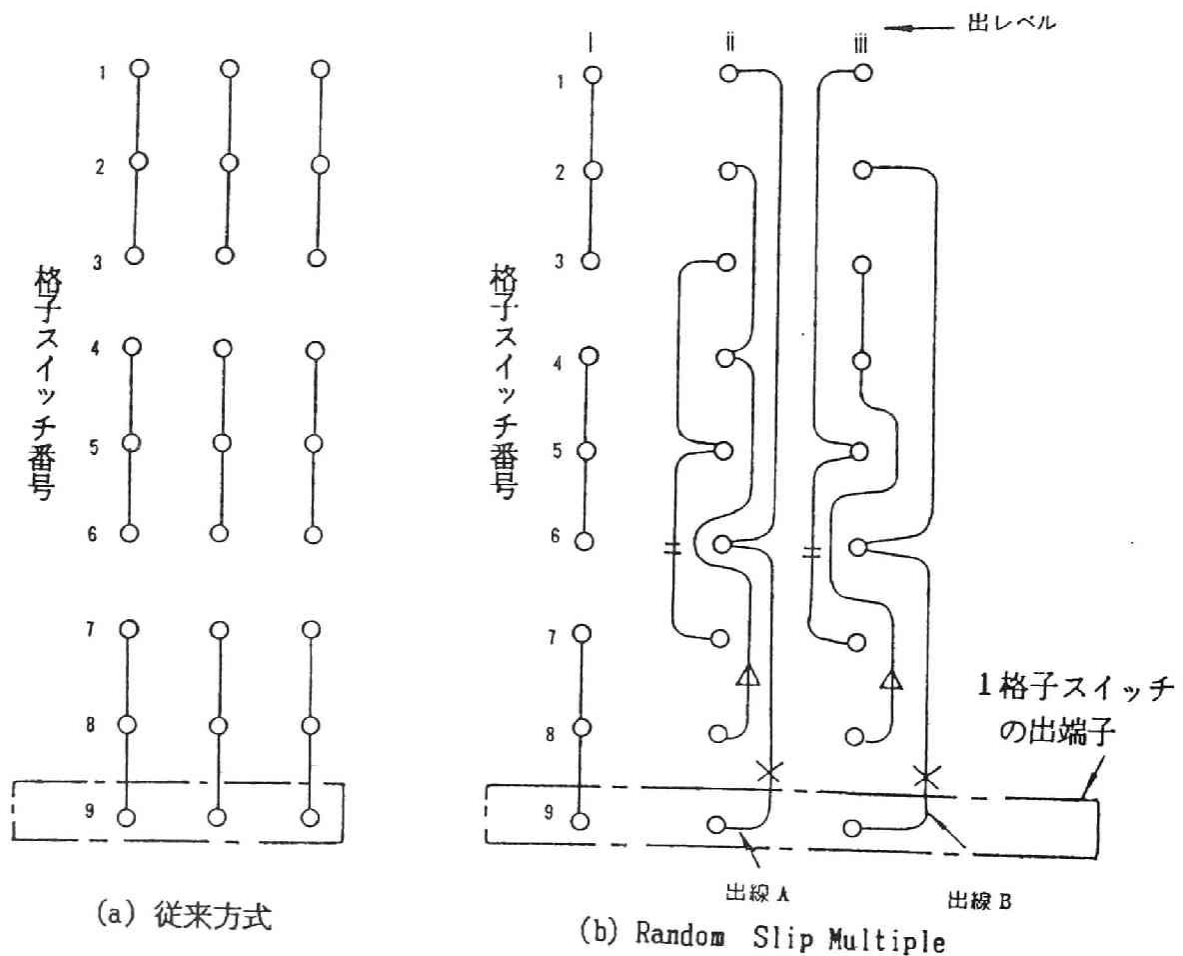


図 4.3 既知の出線複式結線形式

式だけを取りだして表現したのが図4.3(a)である。これに対して Random Slip Multiples (R S M) の例として文献 [26] に上げられている複式結線形式 (図4.1に対応) が図4.3 (b) である。図4.1 に示すR S Mと図4.2 に示す従来方式とは交差点数は等しいが、R S Mの方が入線間の負荷の不均衡を全格子スイッチに分担させるため、負荷の不均衡吸収効果がある。しかし格子スイッチ間の関係が完全に同じとは言えない。たとえば図4.3(b)では出線対によっては両出線への接続経路を持つ入線群数 λ が2となっている。(出線対AとBへは格子スイッチ6と9がアクセス可能である)。どの出線対についても $\lambda \leq 1$ とすることができればより均衡のとれた複式結線形式になる。

また図4.4のグレーディングを考える。
各入線群がアクセスしうる出線番号の集合でブロックを作ると

$$\begin{aligned} B_1 &= \{ 1, 7, 10, 12 \} \\ B_2 &= \{ 2, 7, 10, 12 \} \\ B_3 &= \{ 3, 8, 10, 12 \} \\ B_4 &= \{ 4, 8, 11, 12 \} \\ B_5 &= \{ 5, 9, 11, 12 \} \\ B_6 &= \{ 6, 9, 11, 12 \} \end{aligned}$$

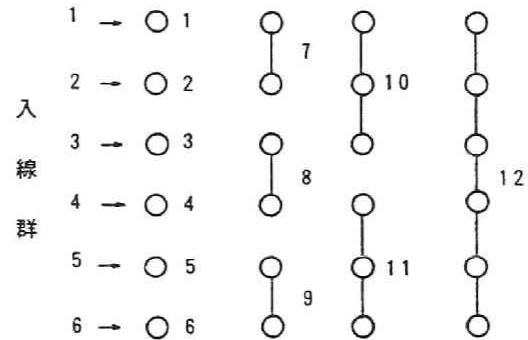


図 4.4 グレーディングの 1 例

となる。出線 i と出線 j が同一ブロックに現れる回数を λ_{ij} とすると

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= 0 \quad (i=1, 2; j=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, \text{ただし } i \neq j), \\ \lambda_{kh} &= 0 \quad (k=3, 4; h=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, \text{ただし } k \neq h), \\ \lambda_{mn} &= 0 \quad (m=5, 6; n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, \text{ただし } m \neq n) \\ \lambda_{3,11} &= \lambda_{4,10} = 0, \\ \lambda_{1,7} &= \lambda_{1,10} = \lambda_{1,12} = \lambda_{2,7} = \lambda_{2,10} = \lambda_{2,12} = \lambda_{3,8} = \lambda_{3,10} \\ &= \lambda_{3,12} = \lambda_{4,8} = \lambda_{4,11} = \lambda_{4,12} = \dots = \lambda_{6,9} = \lambda_{6,11} = \lambda_{6,12} = 1 \\ \lambda_{7,10} &= \lambda_{9,11} = \lambda_{7,12} = \lambda_{8,12} = \lambda_{9,12} = 2, \\ \lambda_{10,12} &= \lambda_{11,12} = 3, \quad \lambda_{8,10} = \lambda_{8,11} = 1 \end{aligned}$$

であり、ブロック (入線群) 数 $b=6$ 、出線数 $v=12$ 、ブロックの大きさ (利用度) $k=4$ 、出線 i が現れるブロック数 (出線 i にアクセスしうる入線群数) r_i が

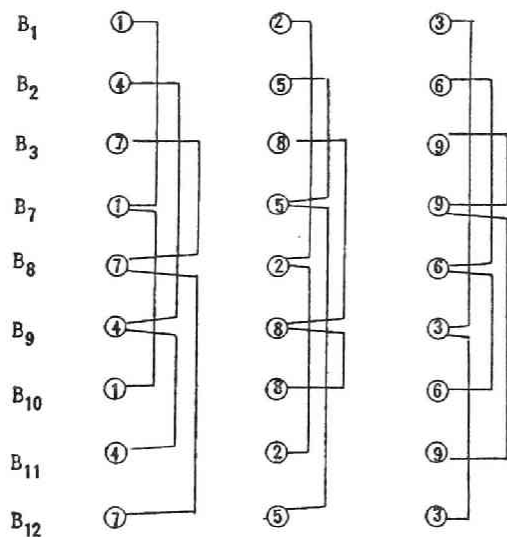
$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 1, \quad r_7 = r_8 = r_9 = 2, \\ r_{10} = r_{11} = 3, \quad r_{12} = 6$$

となっている配置と言える。グレージングを実験計画法における配置の問題と考え、

この $\begin{cases} \text{ブロック } i : \text{入線群 } i \text{ がアクセスしうる出線番号の集合} \\ \text{処理 } j : \text{出線 } j \end{cases}$

なる対応付け [D] を均衡不完備ブロック配置 (BIBD) にそのまま適用すると、式(4.1) の BIBD は

- 入線群数 $b = S^2 + S$, 出線数 $v = S^2$, 利用率 $k = S$,
- 出線 i にアクセスしうる入線群数 r_i は i に係らず一定値 $r = S + 1$,
- 出線 i と出線 j が同一ブロックに現れる回数 λ_{ij} は i と j に係らず一定値 $\lambda = 1$ となる配置と言える。



[例4.1]の $S=3$ の場合の BIBD は項(ii)により作られるブロック B_4, B_5, B_6 を除くと図4.5 のように Slip (異なる出レベル間の複式) を含まないグレージングに対応付けられる。この出レベルは出方路に対応させることができ、どの入線群もすべての出方路にアクセスできる構成になっている。これに対してブロック B_4, B_5, B_6 も含めると必ず Slip を含む構成となり、 B_4, B_5, B_6 に対応する入線群はそれぞれ一方路にしかアクセスできないこと

図 4.5 $S=3$ の場合の BSM-I

になる。すなわち、項(ii)により作られるブロックは除いた方が均衡のとれたグレージングになると言える。

〔アルゴリズム4.1〕の M_1 の各行、すなわち節4.2 の項(i) により作られるブロック B_i の元を $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iS}$ ($i = 1, 2, \dots, S$) とし、 $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{Sj}$ は同一出レベル (出方路) に属する出線 ($j = 1, 2, \dots, S$) とし、異なる出レベル間の複式結線は行わない (Slip はとらない) ものとする、〔アルゴリズム4.1〕の M_2 {項(ii) によって作られる S 個のブロック} は用いられないことと

り、均衡飛び複式結線形式に対する次の〔BSM構成法〕が得られる。

〔構成法4.1〕 〔アルゴリズム4.1〕の M_2 を除く M_i ($i=1,3,4, \dots, S+1$) に対して対応付け〔D〕を行うことにより

$$\left[\begin{array}{l} \text{入線群数 } b' = \text{出線数 } v = S^2, \text{ 利用度 } k = S, \\ \text{各出線にアクセスしうる入線群数 (複式度) } r' = S, \\ \text{出線 } i \text{ と出線 } j \text{ の両方にアクセスできる入線群数 } \lambda_{ij} = 1 \text{ または } 0 \\ \text{(ただし } 0 \text{ となるのは同一出レベルに属する出線対の場合のみ)} \end{array} \right] \quad (4.3)$$

なる複式結線形式 (狭義のBSM) を構成することができる。

以上は、複式度 $r' = S$ のBSMであるが、利用する M_i の数により複式度が S 以下の複式結線形式 (広義のBSM) を構成できる。

〔構成法4.2〕 〔アルゴリズム4.1〕の M_2 を除く l 個の M_i に対して対応付け〔D〕を行うことにより、

$$\left[\begin{array}{l} \text{入線群数} = l \cdot S, \text{ 出線数 } v = S^2, \text{ 利用度 } k = S, \\ \text{各出線にアクセスしうる入線群数 (複式度) } r' = l, \\ \text{出線 } i \text{ と出線 } j \text{ の両方にアクセスできる入線群数 } \lambda_{ij} = 1 \text{ または } 0 \\ \text{(ただし } 0 \text{ となるのは同一出レベルに属する出線対の場合だけ)} \end{array} \right] \quad (4.4)$$

なる複式度可変の複式結線形式 (広義のBSM) を構成することができる。

これらの〔構成法4.1〕、〔構成法4.2〕で作られるBSMをBSM-Iと呼ぶことにする。また入線群数 N , 出線数 n , 利用度 k のBSM-I を $N \times k / n$ で表わすことにする。

狭義のBSMは入線群数と出線数が等しいので、集線比 (入線数と出線数の比) が $n : 1$ (n は整数) の構成をとるためには1入線群を構成する入線数を n とすればよい。

図4.6 に我国の電子交換機DEX-1やAT&Tの電子交換機 No.1 ESSで採用された転置複式(Transp-osed Multiple)とよばれる結線形式を用いた例を示す。この初段にBSM($S=4$)を用いた場合を図4.7 に示す。その他 $k=3$, $k=5$, $k=8$ の場合の狭義のBSMの差点配列を図4.8 , 4.9 に示す。ただし出線番号は図4.7 と同じく同一方路の出線がひとまとめになるよう配置してある。

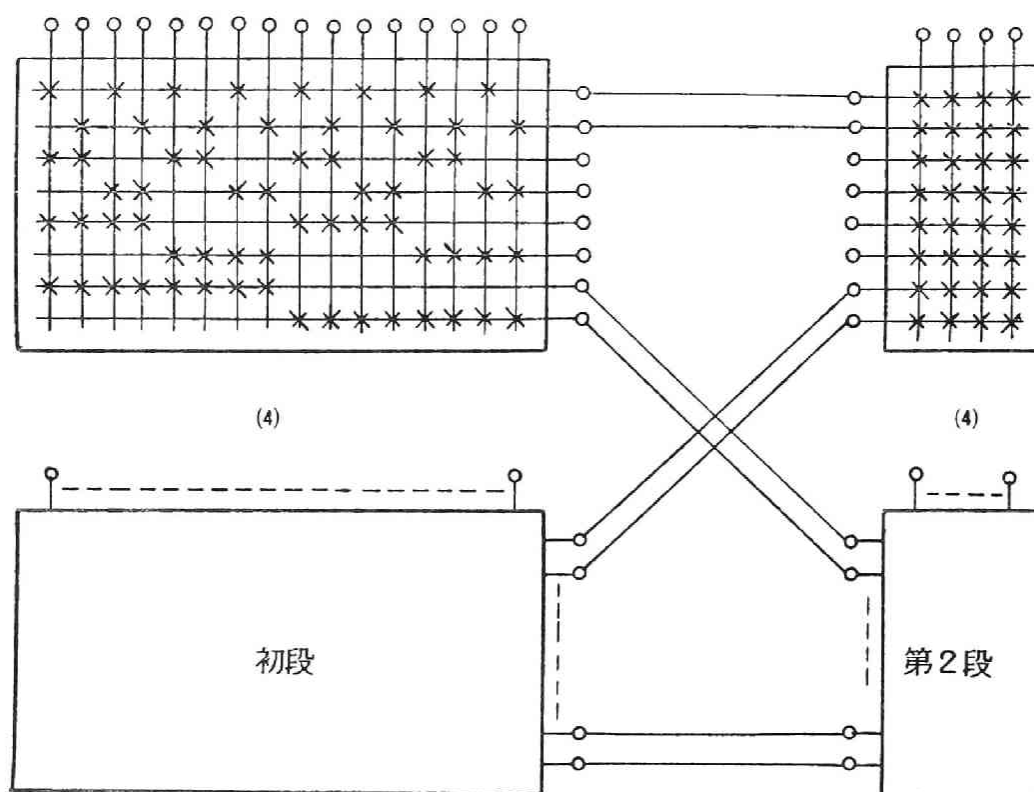


図 4.6 DEX-1または NO.1 ESSの差点配列

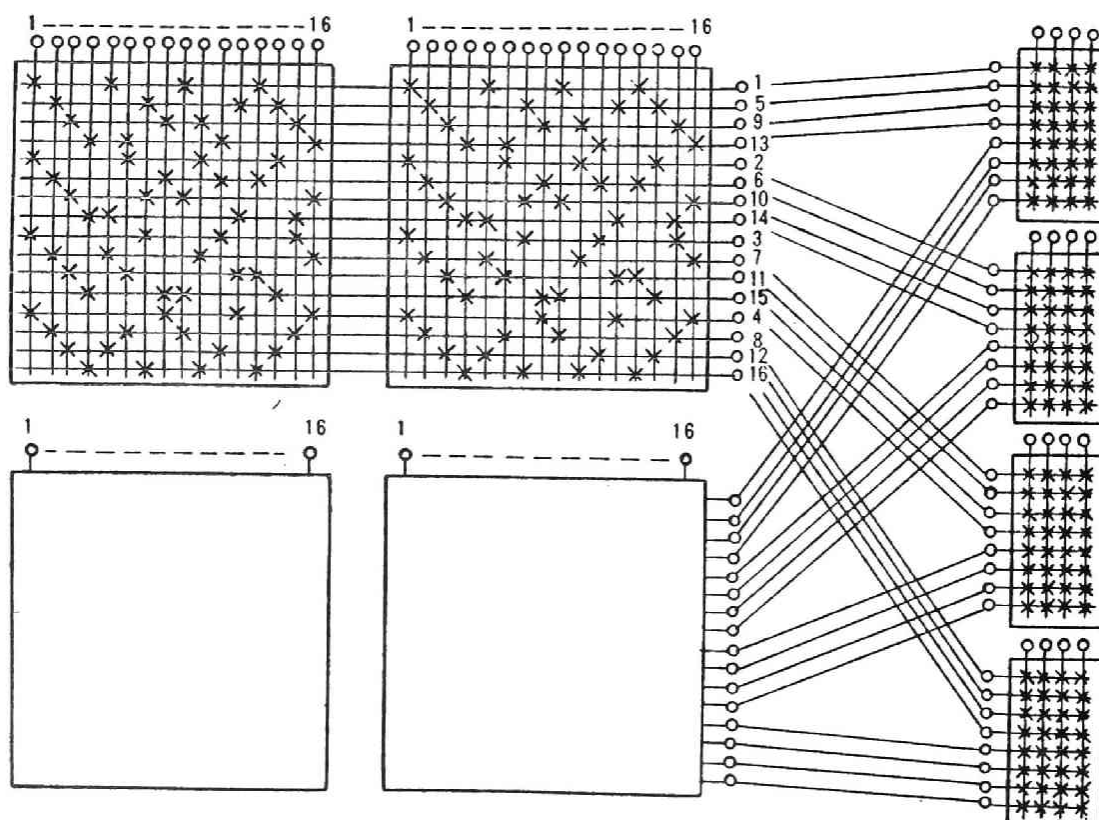


図 4.7 均衡飛び複式結線形式をDEX-1初段に用いた場合

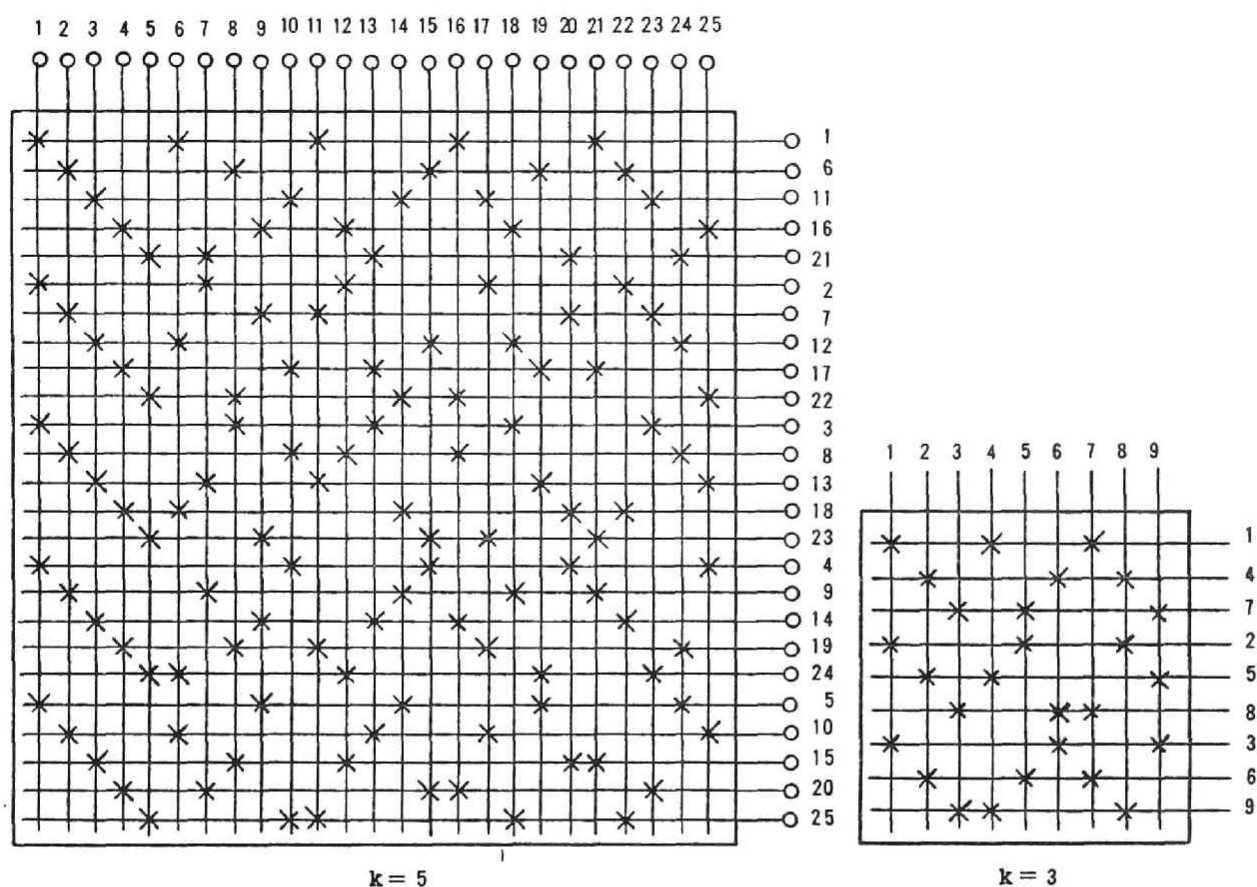


図 4.8 均衡飛び複式結線形式の例 (1)

表 4.2

番号 i	i がアクセスしうる番号 j		
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9
4	1	5	9
5	7	2	6
6	4	8	3
7	1	8	6
8	4	2	9
9	7	5	3

表 4.3

番号 j	j がアクセスしうる番号 i		
1	1	4	7
2	1	5	8
3	1	6	9
4	2	6	8
5	2	4	9
6	2	5	7
7	3	5	9
8	3	6	7
9	3	4	8

これらの式(4.1) で表されるBIBDで作られるBSMは項(i) ~項(iii) の各項で作られるS個ずつのブロックがすべての出線を含んでいるという特徴がある。

この特徴をBSMが持つとき「BSMは分割可能である」と言うことにする。

BSM-Iで出線側から入線群を考えてみる。S=3の場合に $B_1 \sim B_3$ を入線群1~3がアクセスしうる出線番号の集合とし、 $B_7 \sim B_{12}$ を入線群4~9がアクセスしうる出線番号の集合とする。入線群iがアクセスしうる出線は表4.2で与えら

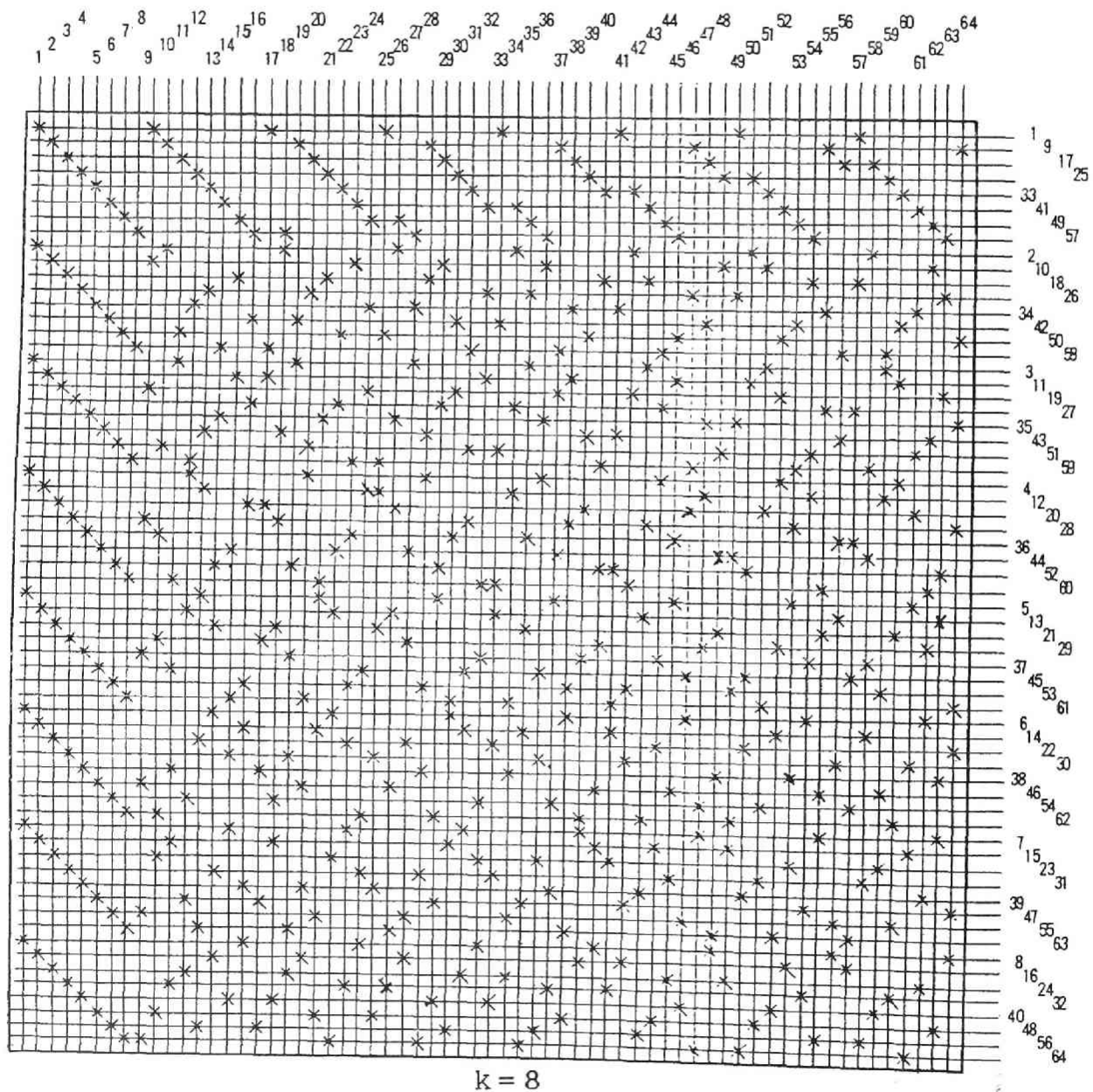


図 4.9 均衡とび複式結線形式の例 (2)

れ、逆に出线 j がアクセスしうる入線群番号 i は表4.3 で与えられる。任意の入線群はどの出方路（出レベル対応）に対しても必ずアクセス可能であるので、逆に見ると同一出方路に属する出线の集合はすべての入線群にアクセス可能である。すなわち表4.3 からわかるように同一出方路に属する出线の集合 $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 6, 9\}$ のそれぞれは全入線群 1~9 にアクセス可能である。また入線群の集合 $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$ のそれぞれは全出线にアクセス可能であり、同じ入方路（入レベル）に属していると言うこともできる。このように BSM-I は入線群と出线の役割を逆にしてもまったく同じ性質を持っていることがわかる。

つぎに式(4.2) で表される BIBD により BSM を作る。この場合にも Slip の生じない結線（異なる出レベル間の複式結線は行わない）をとることにする。たとえば [例4.1] の $S=3$ の場合に

$$\begin{array}{rcccl} B_1' & = & \{ & 1, & 2, & 3, & 10 & \} \\ B_2' & = & \{ & 4, & 5, & 6, & 10 & \} \\ B_3' & = & \{ & 7, & 8, & 9, & 10 & \} \\ & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{出レベル番号} & & 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

と、出线番号と出レベル番号との対応づけを行うと、やはり項(ii)' により作られるブロック $B_4' \sim B_6'$ は除かれる。またブロック B_7' は出レベル4に属する出线にもアクセスしなければならないので出线12は出レベル4に属さなければならない。同様に出线13も出レベル4に属さなければならない。出线10,12,13は同一出レベルに属しているのでブロック B_{13}' も除かれる。このようにして作られるグレージングは

$$\text{入線群数 } b'' = 9, \text{ 出线数 } v'' = 12, \text{ 利用度 } k = 4$$

$$\text{各出线にアクセスしうる出线数 } r' = 3$$

である。

これを一般化すると次の〔BSM構成法〕が得られる。

〔構成法4.3〕 節4.2 の項(ii)' および(iv)' から作られるブロックを除くブロックに対して対応付け〔D〕を行うことにより

$$\left[\begin{array}{l} \text{入線群数 } b'' = S^2 (= b - S - 1), \\ \text{出線数 } v'' = S^2 + S (= v - 1), \\ \text{利用度 } k = S + 1, \\ \text{任意の出線にアクセスしうる入線群数 } r' = S (= r - 1) \end{array} \right] \quad (4.5)$$

なるグレーディングになる。

このBSMをBSM-IIと呼ぶことにする。図4.10に $S=3$ の場合のBSM-IIの複式結線形式とそれを1格子で実現した場合の差点配列を示す。

BSM-IIは図4.10からもわかるように入線群の集合ごとに全出線に1回ずつアクセスできるように入線群を分割することができない。すなわち「BSM-IIは分割不可能である」と言える。

BSM-IとBSM-IIとを比較するとBSM-IIはBSM-Iに出レベル($S+1$)を付加したものであることがわかる。

以上、式(4.1)、式(4.2)で表わされるBIBDから式(4.3)～式(4.5)で表されるBSMの構成方法を示した。これらは

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ブロック } i : \text{入線群 } i \text{ がアクセスしうる出線番号の集合} \\ \text{処理 } j : \text{出線 } j \end{array} \right.$$

なる対応付け [D] に基くものである。逆に式(4.1)のBIBDに対して

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ブロック } i : \text{各出線 } i \text{ にアクセスしうる入線群番号の集合} \\ \text{処理 } j : \text{入線群 } j \end{array} \right.$$

なる対応付け [D*] を行くと、図4.11に示されるようにブロック B_1, B_2, B_3 で出レベルI、ブロック B_4, B_5, B_6 で出レベルII、ブロック B_7, B_8, B_9 で出レベルIII、ブロック B_{10}, B_{11}, B_{12} で出レベルIVの出線の複式結線構造が示されることになる。図4.10と図4.11を比較すると、図4.11の入線群番号5と6を入れ替えることにより

図4.10の出レベル1：図4.11の出レベルII

“	2 :	“	IV
“	3 :	“	III
“	4 :	“	I

のように対応付けられる。すなわち、対応付け [D*] を行くと複式度は常に一定値3をとるが、式(4.1)のBIBDの9ブロックから利用度3のBSM-II, 12プロッ

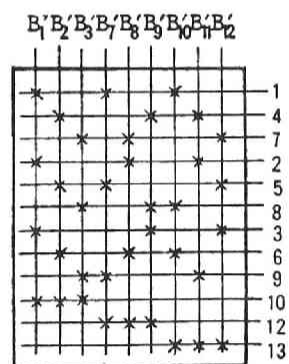
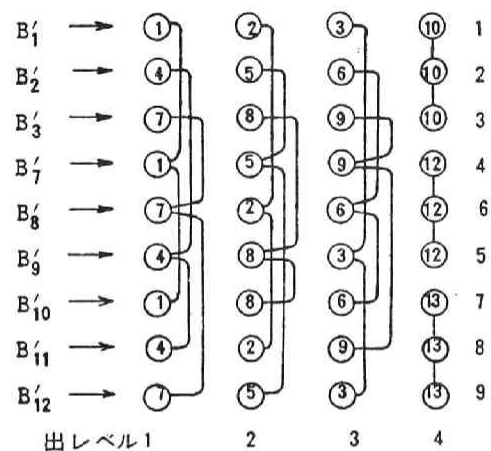


図 4.10 BSM-II (9×4/12)

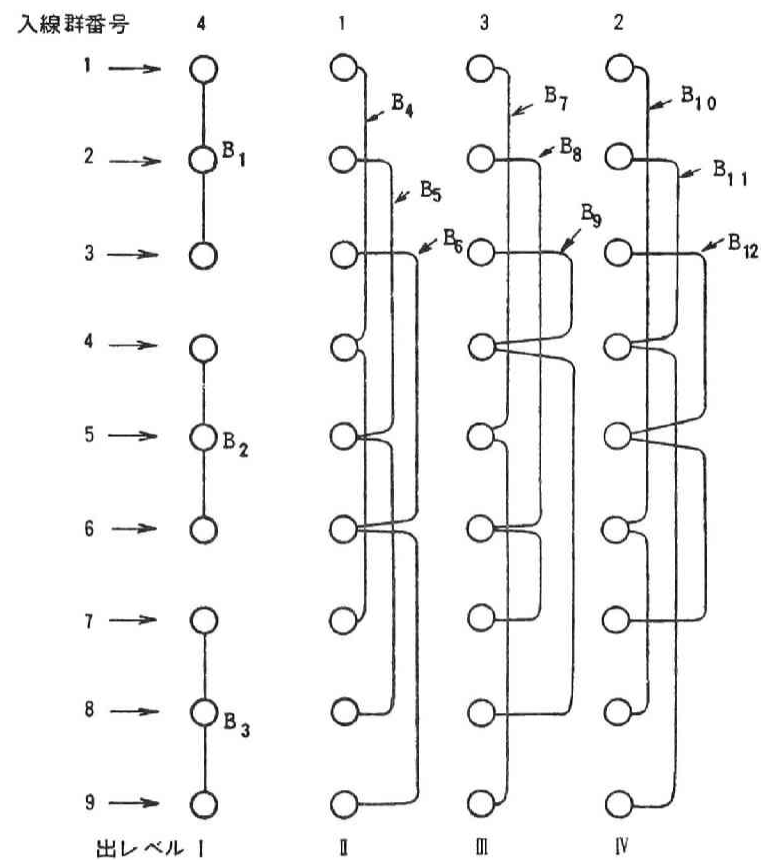


図 4.11 対応付け [D*] の場合の BSM (9×4/12)

クから利用度4のBSM-IIが作られることになる。これはまた式(4.1)のBIBDの3ブロックから利用度1のBSM, 6ブロックから利用度2のBSMが作られることを示している。しかし、式(4.2)のBIBDに対応付け[D*]を施すことはできず、結局、対応付け[D*]は式(4.1)のBIBDに限られ、これによりBSM-IもBSM-IIも作成可能である。更に一般化して言うと、次の構成法が得られる。

[構成法4.4] S を素数 p のべき乗とし、 $S = p^m$ とする。このとき

$$\left[\begin{array}{l} v \text{ (処理数)} = S^2, \quad b \text{ (ブロック数)} = S^2 + S \\ r \text{ (任意の品種が現れるブロック数)} = k + 1 \\ k \text{ (ブロックの大きさ)} = S \\ \lambda \text{ (任意の2品種が同一ブロックに現れる回数)} = 1 \end{array} \right]$$

なる S 個ずつのブロック M_j ($j=1, 2, \dots, S+1$) に分割可能な(各分割が全処理を含む) BIBD が存在し、

$$\left[\begin{array}{l} \text{ブロック } i : \text{出線 } i \text{ がアクセスしうる入線群番号の集合} \\ \quad \quad \quad (\text{出線 } i \text{ にアクセスしうる入線群番号の集合}) \\ \quad \quad \quad (\text{複式をとることによって1出線 } i \text{ を形成しうる入線群番号の集合}) \\ \text{処理番号 } j : \text{入線群番号 } j \end{array} \right]$$

なる対応付け[D*]を、 S 個ずつのブロックの集合 M_j ($j=1, 2, \dots, \ell$) に行うことにより

$$\text{入線群数} = S^2, \text{出線数} = S \cdot \ell, \text{利用度} = \ell,$$

$$\text{各出線にアクセスしうる入線群数(複式度)} = S,$$

$$\text{出線 } i \text{ と出線 } j \text{ が同一ブロックに現れる回数 } \lambda_{ij} \text{ は } 1 \text{ または } 0$$

$$(\text{ただし } 0 \text{ となるのは同一出レベルに属する出線対の場合のみ})$$

なる利用度可変の複式結線形式(広義のBSM)を構成することができる。

また、[構成法4.4]の利用度 S の場合と[構成法4.1]との比較から次の性質が得られる。

[性質4.1] S を素数のべき乗とする。このとき

$$\text{入線群数} = \text{出線数} = S^2, \quad \text{利用度 } k = S,$$

各出線にアクセスしうる入線群数（複式度） $=S$ ，
 出線 i と出線 j の両方にアクセスできる入線群数 $\lambda_{ij}=1$ または 0
 （ただし 0 となるのは同一出レベルに属する出線対の場合だけである）
 なる複式結線形式（広義の BSM ）は対応付け $[D]$ でも対応付け $[D^*]$ でも構成することができる。

4.4 BSM による多段の通話路網の構成法

（１） BSM だけの多段通話路網の構成可能性

具体的なイメージをはっきりさせるために入線群数 9 、出線数 9 、利用度 3 の式(4.3) で表される $BSM-I$ だけで多段の通話路網が構成できるかどうかを考える。

まず、通話路網の最初の 2 段について考える。集線比 $1:1$ の場合には 3×3 の格子で構成される 2 段の通話路網は図4.12の実線で示されるリンクとスイッチから成る構成のように通常、任意の入線と任意の 2 次リンク間に経路がある形式になっている。当然、他の何らかの点で BSM にきわだった利点がない限り、この任意の入線と任意の 2 次リンク間に経路があるという性質（これを経路存在性と呼ぶ）は BSM で 2 段の通話路網を構成する場合にも具備すべきものである。 2 段の BSM 構成には図4.13のようなものが考えられる。これは入線と 1 次リンク、 1 次リンクと 2 次リンクの対応付けで分類するものであり、節4.3 で示した表4.2 あるいは表4.3 のいずれかでその対応付けは行われる。なお表4.2 は番号 i がアクセスしうる番号の集合 j を指定するものであり、表4.3 は番号 j がアクセスしうる番号 i の集合を指定するものであり、入線と 2 次リンクを i と j のどちらに対応付けたものかということによる分類である。そこで図4.13の(a) は $i-j$ 型（入線が i で 2 次リンクが j ），(b) は $i-i$ 型，(c) は $j-j$ 型と呼ぶこととする。ここで $j-i$ 型は省略したがこれは(a)の左右を引っくり返せば同様の論議ができるからである。

図4.13で示される各形式について経路存在性を検討する。表4.4 ～表4.6 に各パターンでの、入線とそれがアクセスしうる 1 次リンク、 2 次リンクとの対応を示す。パターン(a) では入線 $1, 2, 3$ はすべての 2 次リンクにアクセスできるが、入線 $4 \sim 9$ はアクセスできない 2 次リンクがある。パターン(b)，(c)

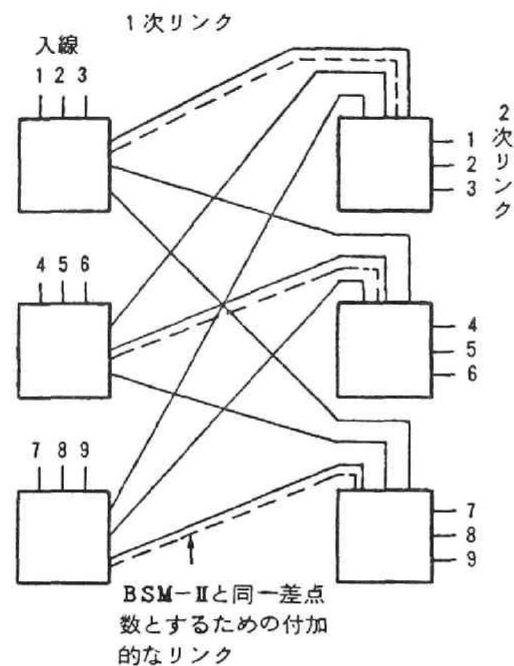


図 4.12 通常の2段の通話路網構成

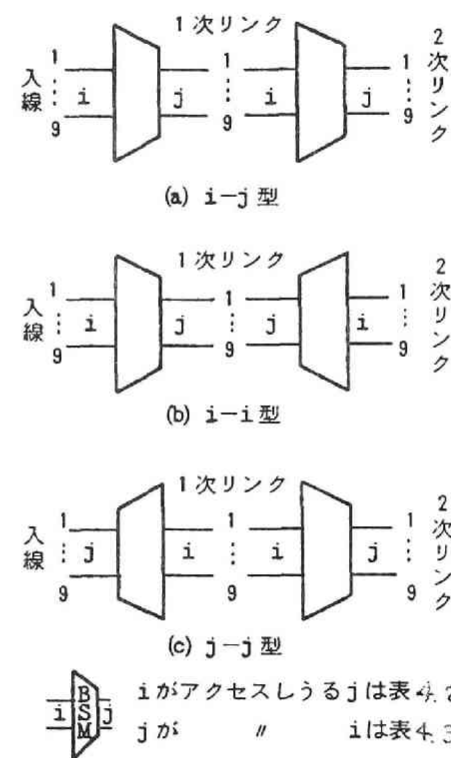


図 4.13 2段のBSM構成

表 4.4 BSM-I (a) i-jタイプ

i_1	$j_1=i_2$	j_2	i_1	$j_1=i_2$	j_2	i_1	$j_1=i_2$	j_2
1	1	1 2 3	4	1	1 2 3	7	1	1 2 3
	2	4 5 6		5	7 2 6		8	4 2 9
	3	7 8 9		9	7 5 3		6	4 8 3
2	4	1 5 9	5	7	1 8 6	8	4	1 5 9
	5	7 2 6		2	4 5 6		2	4 5 6
	6	4 8 3		6	4 8 3		9	7 5 3
3	7	1 8 6	6	4	1 5 9	9	7	1 8 6
	8	4 2 9		8	4 2 9		5	7 2 6
	9	7 5 3		3	7 8 9		3	7 8 9

i_1 : 入線番号、 $j_1=i_2$: 入線 i_1 がアクセスしうる1次リンク番号

j_2 : 1次リンク i_2 がアクセスしうる2次リンク番号

表 4.5 BSM-I (b) i-iタイプ

i_1	j	i_2	i_1	j	i_2	i_1	j	i_2
1	1	1 4 7	4	1	1 4 7	7	1	1 4 7
	2	1 5 8		5	2 4 9		8	3 6 7
	3	1 6 9		9	3 4 8		6	2 5 7
2	4	2 6 8	5	7	3 5 9	8	4	2 6 8
	5	2 4 9		2	1 5 8		2	1 5 8
	6	2 5 7		6	2 5 7		9	3 4 8
3	7	3 5 9	6	4	2 6 8	9	7	3 5 9
	8	3 6 7		8	3 6 7		5	2 4 9
	9	3 4 8		3	1 6 9		3	1 6 9

i_1 : 入線番号、 j : 入線 i_1 がアクセスしうる1次リンク番号

i_2 : 1次リンク j がアクセスしうる2次リンク番号

表 4.6 BSM-I (c) j-jタイプ

j_1	i	j_2	j_1	i	j_2	j_1	i	j_2
1	1	1 2 3	4	2	4 5 6	7	3	7 8 9
	4	1 5 9		6	4 8 3		5	7 2 6
	7	1 8 6		8	4 2 9		9	7 5 3
2	1	1 2 3	5	2	4 5 6	8	3	7 8 9
	5	7 2 6		4	1 5 9		6	4 8 3
	8	4 2 9		9	7 5 3		7	1 8 6
3	1	1 2 3	6	2	4 5 6	9	3	7 8 9
	6	4 8 3		5	7 2 6		4	1 5 9
	9	7 5 3		7	1 8 6		8	4 2 9

j_1 : 入線番号、 i : 入線 j_1 がアクセスしうる1次リンク番号

j_2 : 1次リンク i がアクセスしうる2次リンク番号

ではすべての入線がアクセスできない2次リンクを持つ。すなわちどのパターンも経路存在性の条件を満足しない。

つぎに、 $b = v = S^2 + S + 1$, $r = k = S + 1$, $\lambda = 1$ なる BIBD から作られる BSM-II (入線群数 $b'' = S^2$, 出線数 $v'' = S^2 + S$, 利用度 $k = S + 1$ なる BSM) について考えてみる。ここでも例としては $S=3$ の場合を取り上げる。 $b'' \neq v''$ であるので1次格子の出線数の和と2次格子の入線数の和とは等しくなる必要があり、考えられるパターンは図4.13の(b)あるいは(c)である。パターン(c)では表4.8からわかるように1~9の入線 j についてはアクセスできる1次リンクがBSM-Iとまったく同じであるのでやはり経路存在性の条件を満足しない。これに対してパターン(b)の場合には表4.9に示されるように経路存在性の条件が満足される。しかしこのBSM-IIを用いる方法は通常の通話路網よりも差点数が多く、図4.12の実線で示されるリンクの外に破線のリンクを追加して1次、2次格子とも矩形格子とし特定の1次-2次格子間を複式にしたものと差点数が等しく、特定の入線-2次リンク間が複式になったアンバランスな形式と言える。たとえば図4.13(b)のタイプでは入線番号1と2次リンク番号1の間は4重になっている。

表 4.7

番号 i	i がアクセスしうる番号 j			
1	1	2	3	10
2	4	5	6	10
3	7	8	9	10
4	1	5	9	11
5	7	2	6	11
6	4	8	3	11
7	1	8	6	12
8	4	2	9	12
9	7	5	3	12

表 4.8

番号 j	j がアクセスしうる番号 i		
1	1	4	7
2	1	5	8
3	1	6	9
4	2	6	8
5	2	4	9
6	2	5	7
7	3	5	9
8	3	6	7
9	3	4	8
10	1	2	3
11	4	5	6
12	7	8	9

表 4.9 BSM-II (b) $i-i$ タイプ

i_1	j	i_2			i_1	j	i_2		
1	1	1	4	7	4	1	1	4	7
	2	1	5	8		5	2	4	9
	3	1	6	9		9	3	4	8
	10	1	2	3		11	4	5	6
2	4	2	6	8	5	7	3	5	9
	5	2	4	9		2	1	5	8
	6	2	5	7		6	2	5	7
	10	1	2	3		11	4	5	6
3	7	3	5	9	6	4	2	6	8
	8	3	6	7		8	3	6	7
	9	3	4	8		3	1	6	9
	10	1	2	3		11	4	5	6

i_1 : 入線番号、 j : 入線 i_1 がアクセスしうる 1 次リンク番号

i_2 : 1 次リンク j がアクセスしうる 2 次リンク番号

つぎに3個のBSM-Iを並べてみよう。図4.14(d)あるいは(e)のような構成が考えられる。表4.2に示される対応付けでは番号*i*のうち{1,2,3}, {4,5,6}, {7,8,9}の集合のそれぞれがすべての*j*にアクセス可能である。すな

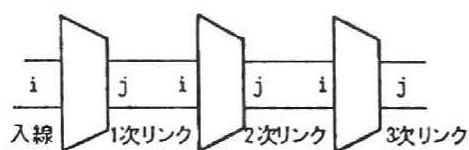
わち、図4.14(d)ではすべての入線が2次リンクのうち{1,2,3}, {4,5,6}, {7,8,9}のいずれかの集合の全要素にアクセスできればすべての3次リンクにアクセス可能である。1次リンク*i*と2次リンク*j*の対応づけを表4.2により行くと1次リンク1は2次リンク1, 2, 3に

“ 2は “ 4, 5, 6に

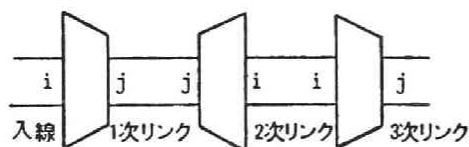
“ 3は “ 7, 8, 9に

アクセスできることがわかる。すなわち各入線が1次リンク1, 2, 3のうちのいずれかにアクセスできればすべての3次リンクにアクセス可能な2次リンクの集合にアクセスできることになる。この条件は入線2, 3を除くすべての入線が満足している。ところで入線2, 3はすべての2次リンクにアクセス可能であり、従って任意の入線と任意の3次リンク間には経路が存在する。図4.14(e)では表4.5からわかるように各入線は、すべての3次リンクにアクセス可能な2次リンクの集合{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}のうち2つの集合にアクセス可能であり、任意の入線と任意の3次リンク間には経路が存在すると言える。

つぎにパターン(d)と(e)を比較する。パターン(d)の方は一応どの入線もすべての3次リンクにアクセスできるとは言ってもアクセスできる2次リンク



(d)



(e)

数にばらつきがあり、トラヒック特性はアクセスできる2次リンク数が少ない入線にひきずられて悪くなる可能性が強い。これに対してパターン(e)の方はどの入線もアクセスできる2次リンク数は同じであり、トラヒック特性はどの入線に対しても均一になる。

図 4.14 3 段の BSM 構成

ここで初段の1BSMのすべての出線を第2段の1BSMのすべての入線としても入線、2次リンク間の経路存在性の条件を満たしなかったのであるから、初段、第2段ともに複数個のBSMとして初段の1BSMの出線が第2段の複数個のBSMに分けられる時には当然、任意の入線と2次リンク間の経路存在性の条件が満足されないことは明らかである。

以上の検討によりBSMだけで多段の通話路網を構成する場合にはBSM-I（入線と出線数が等しい）では3段以上のときに入線、出線間の経路が存在するが、すべての2次リンクにアクセスできるわけではないのですべての2次リンクにア

クセスできる場合（図4.12）に比べてトラヒック特性が悪くなる。また、BSM-II（入線数<出線数）ではすべての2次リンクにアクセスできるかわりに差点数が増加するという欠点がある。従ってBSMだけで多段の通話路網を構成するメリットは小さいと言える。

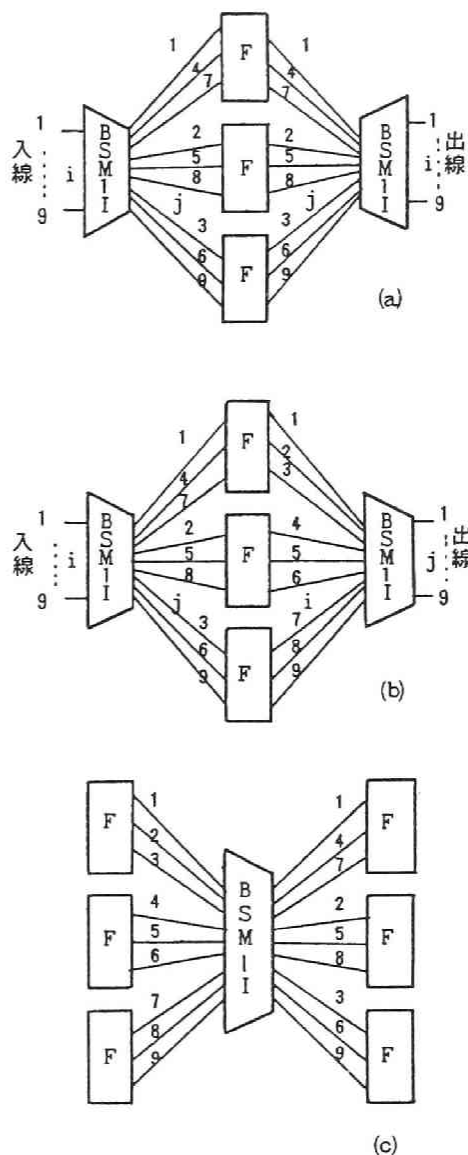


図 4.15 BSM-I と完全線群格子(F)による3段の通話路網

(2) BSMと完全線群格子による多段通話路網の構成法

完全線群（いずれの入線からも出線があきであれば接続可能な交換線群）格子スイッチのみで構成されている図4.12のような場合には同一2次格子に収容されている1次リンクは同じ方路に行く1次格子の出線と見ることができる。すなわち第2段に完全線群格子を配する場合には初段のBSMの同一出レベルに属する出線を同一2次格子の入線とすればよい。

たとえばBSM-Iでは節4.3で示したように{1, 4, 7}, {2, 5, 8}, {3, 6, 9}のそれぞれの集合が同一出レベルに属するので、それぞれの集合に属する1次リンク番号を同一2次格子の入線とすればよい。これは出線側から2次リンクをながめる時にも同じことがいえるので図4.15(a)のような構成が考えられる。BSM-Iでは入線と出線の役割を逆にしても同じ性質を持っており、同じ入レベルに属するのは{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}であるので図4.15(b)のように1次リンク、2次リンクと2次格子との対応付けを行ってもよい。

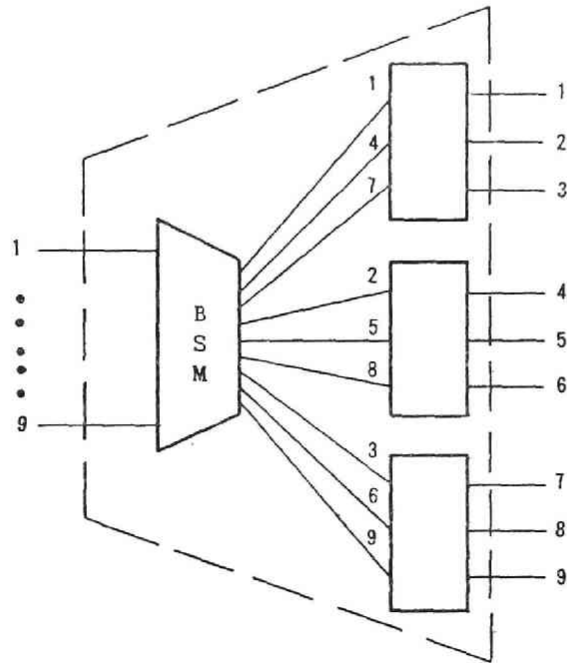
図4.15(c)のように真ん中にBSMをとる構成も考えられるが、これはBSMの利点である入線や出線での負荷の不均衡の吸収には役立たないので魅力は少ない。

図4.15(a), (b)で表される通話路網の出、入端子数をふやすためには

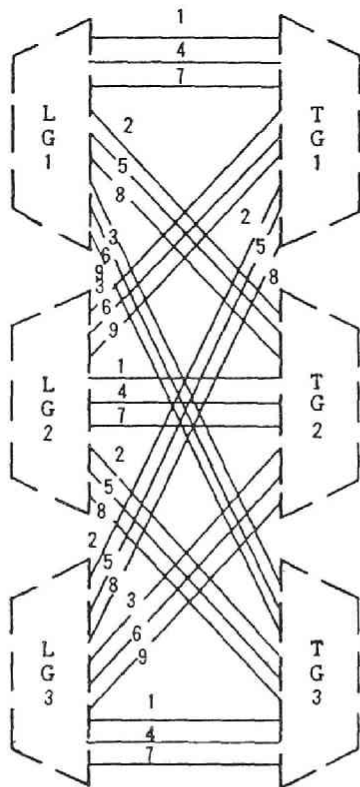
- (i) 初段BSMの1入線群当りの入線数をふやす
- (ii) 第2段で出線複式をとる（そのとり方は従来の完全線群格子と同様にとればよい）
- (iii) 第3段で出線複式をとる
- (iv) 段数をふやす

といった手段が考えられる。(i) ~ (iii)は容易と考えられるので、以下では(iv)について考察する。

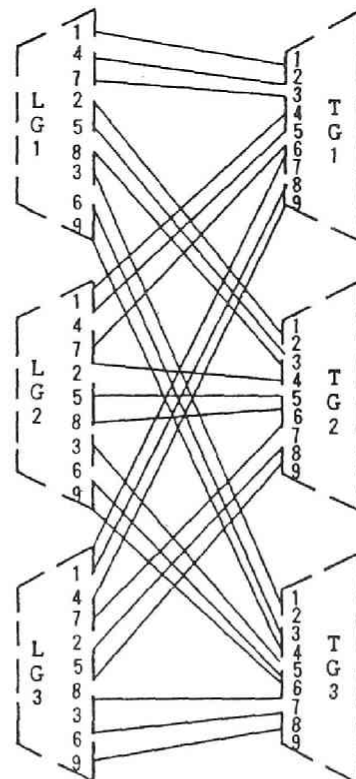
図4.16(a)に表されている破線で囲まれた2段の構成を単位として4段の通話路網を構成するには図4.16(b)あるいは(c)で表されるような2つのパターンI、IIが考えられる。パターンIでは入線および出線の負荷の不均衡を1次リンクおよび3次リンクで吸収することができるが、パターンIIでは出線の負荷の不均衡の吸収が2次リンクで行われるため、通常の完全線群格子の場合と同様



(a) 構成単位



(b) パターン I



(c) パターン II

図 4. 1 6 4 段の通話路網構成例

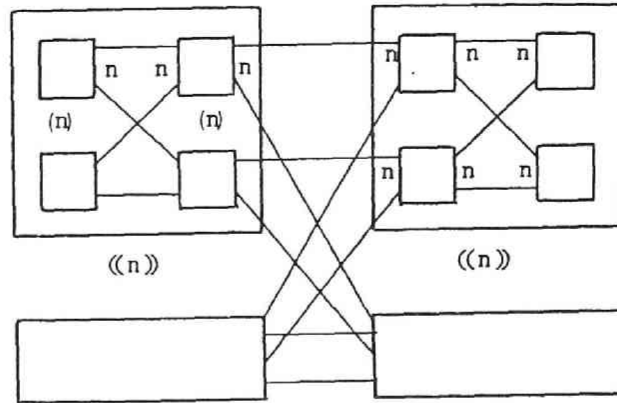


図 4.17 完全線群格子のみによる4段の
通話路網構成

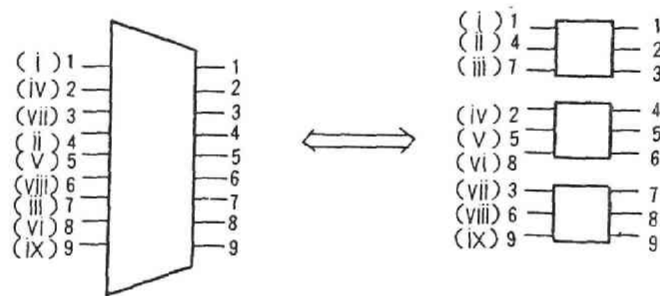


図 4.18 BSMと完全線群格子の対応付け

の効果しか上げられず意味がない。すなわちこのことは任意段数の通話路網を構成するとき

(ア) 両端にBSMをおくこと

(イ) BSMは高々1段おきにしかおいてはいけないこと

の2点を構成指針とすべきだということを意味している。

図4.16(b)，(c)に対応する完全線群格子だけによる4段の通話路網構成は図4.17の $n = 3$ の場合となる。さらに分解して考えると図4.18に示されるようにBSMは異なる方路に行く入線（異なる入レベル、出レベルの出線）を3個の完全線群のそれぞれに収容させることと対応づけることができる。すなわち n 個の $n \times n$ 格子スイッチを $n^2 \times n/n^2$ なるBSMと高々1段おきに入れ替えることにより得られるBSM、完全線群格子スイッチ混合の通話路網と置換す

ることができる。

以上、経路存在性の条件が満足される場合および図 4.12 の初段は図4.8 の $k = 3$ の B S M で置換できることなどを考慮して次の構成法が得られる。

[構成法4.5] 総出線数 $v = k^2$ (素数の偶数べき乗)、利用度 (1 格子当りの出線数) $= k$ の図4.19で示される複数個の格子スイッチは [構成法4.1] に示した均衡飛び複式結線形式 (B S M) で置換することができ、経路存在性の条件を満足するためには B S M を 2 段続けて置くことはできず、入線および出線の負荷の不均衡を吸収するためには通話路網の両端に置かなければならない。

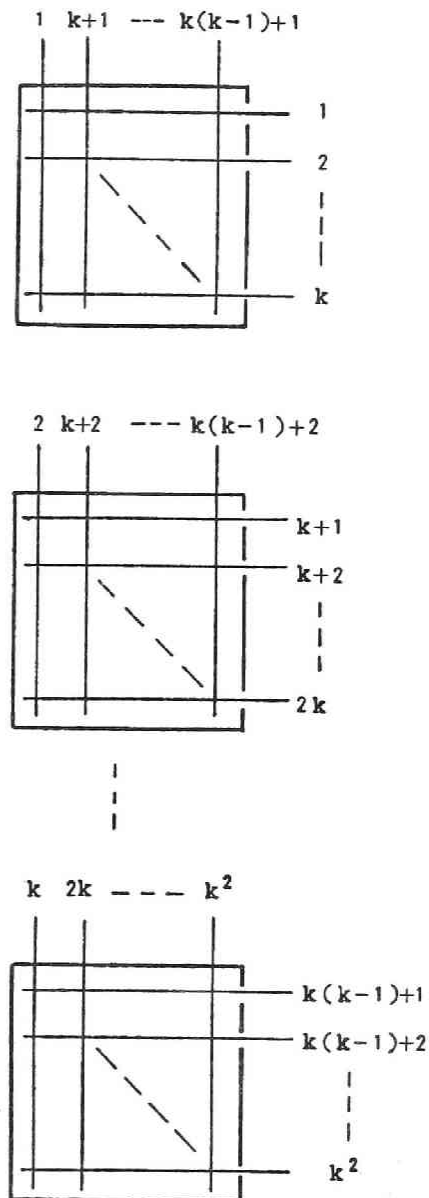


図 4.19 均衡飛び複式結線形式で置換可能な格子スイッチ構成

4.5 経路選択プログラム

図4.17の通話路網を例にとり考察する。

B S M を多段の通話路網の初段に持ってきた場合を考える。図4.18の B S M と完全線群格子とを比較すると、完全線群格

子では表4.10で示されるように 3 入線毎に同じ出線の集合すなわち 1 次リンクの集合にアクセス可能であるのに対し、B S M では表4.2 で示されるように入線毎にアクセス可能な 1 次リンクの組合わせが異なる。

出線 1, 4, 7 を 2 次格子 1 の入線とし、出線 2, 5, 8 を 2 次格子 2 の入線とし、出線 3, 6, 9 を 2 次格子 3 の入線とすると、B S M も完全線群格子も各入線が 2 次格子 1, 2, 3 のすべてにアクセス可能なので 2 次格子より後段の可能な経

路は同じである。

表4.10

1次リンクの空塞を9ビットで表わし、第jビットが1次リンクjの空塞情報を表わすとする、表4.2あるいは表4.10の入線i毎に与えられるjから空塞表の第jビットの値を引くことで1次リンクの空塞が分かる。

以上より、空き経路をさがすとき、表4.2と表4.10の情報が異なる以外には同じ処理を行うことになる。

入線 i	iがアクセス しうる出線j		
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9
4	1	2	3
5	4	5	6
6	7	8	9
7	1	2	3
8	4	5	6
9	7	8	9

4.6 む す び

本章では新しい複式結線形式として均衡飛び複式結線形式(BSM)の提案を行った。節4.2ではBSMを構成する際に利用する均衡不完備ブロック配置(BIBD)の作り方を示した。すなわち、次数が素数のべき乗の完全直交ラテン方格系が存在し、そのうちの1ラテン方格を利用することにより2種類のBIBDが作れることを示した。

節4.3ではBIBDのブロックと処理に対して

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ブロック } i : \text{入線群 } i \text{ がアクセスしうる出線番号の集合} \\ \text{処理 } j : \text{出線 } j \end{array} \right.$$

なる対応付け[D]により複式度可変のBSMを構成できること、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ブロック } i : \text{各出線 } i \text{ にアクセスしうる入線群番号の集合} \\ \text{処理 } j : \text{入線群 } j \end{array} \right.$$

なる対応付け[D*]により利用度可変のBSMを構成できることを示した。

節4.4ではBSMだけでは多段の通話路網を構成する利点が少ないこと、BSMは高々、1段おきにしか用いられないこと、負荷不均衡の吸収のためには両端の段に置くべきことを示した。

BSMを採用した多段の通話路網の経路選択を蓄積プログラム制御交換機で実施する際の具体的な方法については詳述しなかったが、基本的には節4.5に示したように各入線群がアクセスし得る出線番号を指定する表さえあればよい。

5.1 まえがき

いずれの入線からも出線が空きであれば接続できる完全線群格子スイッチにおける呼損率は入線数 n 、出線数 m と 1 空き入線当りの生起呼量 α で決まり、入線数と出線数の比が一定であれば n あるいは m が大きい（スイッチサイズが大きい）ほど、同じ呼損率に対しては大きな呼量を加えることができ、1 空き入線当りの生起呼量 α が一定のもとでは呼損率が小さくなる。

前章で提案した均衡飛び複式結線形式（BSM）では、ある入線に着目すると、その入線がアクセス可能な出線にアクセスできるすべての入線のトラヒック量に依存して呼損率や同時接続数分布で表されるトラヒック特性が決まる。そのため通常の複式接続における関連入線数よりもはるかに多い入線数で負荷を分かち合うという特徴をBSMは持ち、スイッチサイズを大きくするのに似た効果が期待される。

またBSMでは入線間に負荷の不均衡があっても入線群毎にアクセス可能な出線の組合せが異なるため入線群間の負荷不均衡の影響は薄められる。

これらのトラヒック特性上のBSMの効果を定量的に評価するために、先ず節5.2ではアーランの理想的なグレージング^[27]における考え方を参考にして、呼が出合う同時接続数分布の近似式を提案する。節5.3ではその近似式およびシミュレーションによりBSMのトラヒック特性を明らかにする。

5.2 同時接続数分布の近似計算法

本節では、先ず、呼が出合う同時接続数分布としてアーランの理想的なグレージングの考え方を取り入れた近似式を提案し、その精度をシミュレーションにより評価する。その際に使用するシミュレータの概要を示す。

（1） 近似式の提案

通常、多段の通話網で初段の1格子スイッチに要求される呼損率は 10^{-4} 程度であるが、このように呼損率が非常に小さいときには呼損率を無視しても同時接続数分布への影響は小さく、均衡飛び複式結線形式の全出線の同時接続数分布は、全入線数 $N \times$ 全出線数 M の完全線群の同時接続数分布で近似できる。関心があるのは全出線のうち、各入線群がアクセス可能な特定の k 出線の同時接続数分

布である。ところでアーランの理想的なグレージングが行われているときには、出線が j 本使用中のときに、特定の g 本が使用中である確率は完全線群と同じく $\binom{M-g}{j-g} / \binom{M}{j}$ で与えられる。これらのことから有限呼源、等生起係数（各入線群の生起呼量均等）を持つポアソン到着および損失呼消滅の前提（通話路網の呼損率を考えるときにはこれらの前提で考えられることが多い）のもとでは全入線数 N 、全出線数 M 、利用度 k の均衡飛び複式結線形式の入線に呼びが生起したとき、その呼びがアクセスしうる k 出線のうち i 出線がふさがっている確率 $G(i)$ は、 α を 1 空き入線当りの生起呼量とし、

$$n = \min(N-1, M-k+1), \quad m = \min(N-1, M)$$

と置くと

$$G(i) = \frac{\sum_{j=i}^n \binom{N-1}{j} \alpha^j \binom{k}{i} \binom{M-k}{j-i} / \binom{M}{j}}{\sum_{h=0}^m \binom{N-1}{h} \alpha^h} \quad (5.1)$$

で近似できると考えられる。

利用度 k が一定で複式度 r が可変（集線比 $l:1$ のときには $r=l$ ，入線群数 $=k \cdot l$ ）の広義の BSM をパターン A と呼び、複式度、利用度が等しい狭義の BSM をパターン B と呼ぶ。狭義の BSM では集線比にかかわらず入線群数 $v=k^2$ であり、集線比 $l:1$ のときには 1 入線群当りの入線数が l である。これらの複式結線形式の呼損率（呼輻輳率）を理論的に求めるには、状態として各入線群がどの出線を使用しているかを指定する必要があるが、實際上、不可能である。そこで本節では、パターン A、B に対してマルコフ連鎖の方法に従うシミュレーションを行い、式(5.1)と比較することにする。

(2) シミュレーターの概要 [34] [35]

呼が出合う同時接続数分布を求めるために作成したシミュレータはマルコフ過程において生起や終了など状態の変化時点にだけ着目するとマルコフ連鎖となることを用いている。たとえば 1 空き入線当りの生起率 λ 、サービス率 μ の $M(N)/M/S(0)$ なる入線数 N の即時系システムにおいて、 i 個サービス中にある時点から見て次に起こる事象が生起である確率は

$$(N-i) \lambda / \{(N-i) \lambda + i \mu\}$$

であり、次の事象が終了である確率は

$$i \mu / \{(N-i) \lambda + i \mu\}$$

である。従って(0,K) の範囲の一様乱数 u を発生させ、

$$u \in (0, K \times i \mu / \{(N-i) \lambda + i \mu\})$$

ならば終了、

$$u \in (K \times i \mu / \{(N-i) \lambda + i \mu\}, K)$$

ならば生起として状態を変化させることによりマルコフ連鎖を模擬する。同時接続数、時間ふくそう率などの系の状態を測定するには u の値域に測定用区間を追加すればよいが、測定間隔は必然的に指数分布となる。また BSM 用シミュレータでは入線群毎にアクセス可能な出線の集合が異なるため入線群毎に使用中の回線数を把握する必要がある。

総出線数 M 、総入線数 N 、1 入線群当りの入線数 n 、入線群 i の使用中入線数 n_i 、1 空き入線当りの生起呼量 α 、平均保留時間 1 の通話路網に対して

$$0 < U < M + N \cdot \alpha + \gamma \quad (5.2)$$

γ : 状態測定の頻度を定める定数

の範囲の一様乱数を発生させ、呼の終了は

$$0 < U < M \quad (5.3)$$

のときで、その出線番号は (U の整数部分 + 1) で決める。指定された出線番号が使用中でないときには状態測定ルーチンに入るようにする場合もあるが、状態測定頻度が使用出線数に依存することになるため本シミュレータではその乱数を廃棄し、直ちに次の乱数を発生させる方法を採用している。すなわち

$$M + \sum_{i=1}^{h-1} (n - n_i) \alpha \leq U < M + \sum_{i=1}^h (n - n_i) \alpha \quad (5.4)$$

(但し、 $1 \leq h \leq N/n$ であり、 $h=1$ のときは最左辺の Σ 部は零とする)

ならば入線群 h から呼が生起したものとし、

$$M + N \cdot \alpha \leq U < M + N \cdot \alpha + \gamma \quad (5.5)$$

ならば同時接続数を測定し、

$$M + \sum_{i=1}^{N/n} (n - n_i) \alpha \leq U < M + N \cdot \alpha \quad (5.6)$$

ならばその乱数を廃棄して次の乱数を発生させることとしている。

(3) 近似精度の評価

全出線数 $M=64$ 、利用度 $k=8$ で集線比 $2:1$ の場合のシミュレーションおよび式(5.1)の計算の結果を図5.1、図5.2に示し、集線比 $5:1$ の場合を表5.1、パターンAとBが同じ集線形式を表すことになる集線比 $8:1$ の場合を表5.2に示す。これらの図および表からパターンBの場合には、常に式(5.1)による評価は安全側になること、パターンAの場合には呼損率の点で若干危険側だが、集線比が $2:1$ 、 $5:1$ 、 $8:1$ と大きくなるにつれて式(5.1)に近くなることがわかる。呼損率が高くなってくると式(5.1)の評価が安全側になる傾向がある理由を考察する。式(5.1)では全出線のうち j 本がふさがっている確率を

$$\frac{\binom{N-1}{j} \alpha^j}{\sum_{h=0}^m \binom{N-1}{h} \alpha^h} \quad (5.7)$$

で近似している。このため全出線数 M のうち i 本ふさがっている状態を状態 i と呼ぶとき、状態 i から状態 $(i+1)$ に遷移するとき実際には呼損があるにも拘らず式(5.7)では呼損がないものとして状態遷移を考えたことになっているからである。この呼損の確率は近似的には $\binom{M-k}{i-k} / \binom{M}{i}$ である。

全出線数16、利用度4の場合にも図5.3、図5.4に示されるように、式(5.1)が均衡飛び複式結線形式をとった場合の同時接続数分布をよく近似していることがわかる。

以上から式(5.1)は均衡飛び複式結線形式をとった場合の同時接続数分布式として有効であると言える。

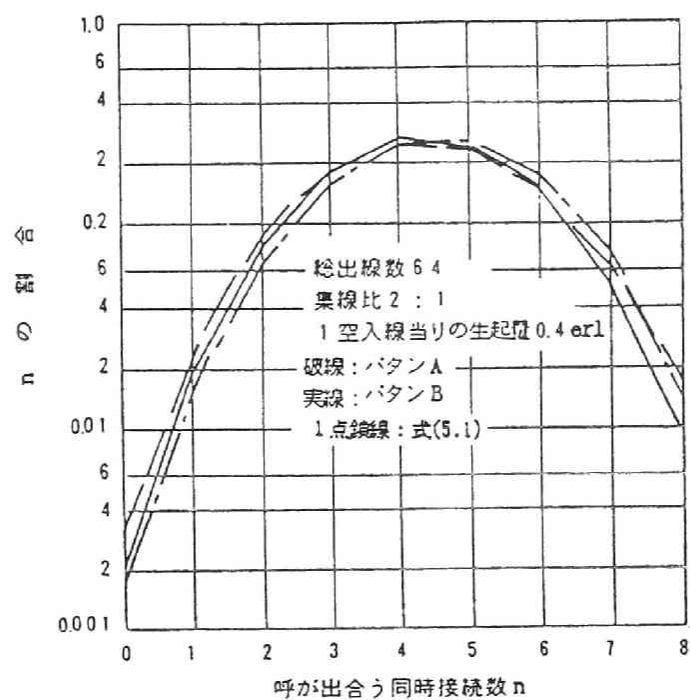


図 5.1 同時接続数分布 (1)

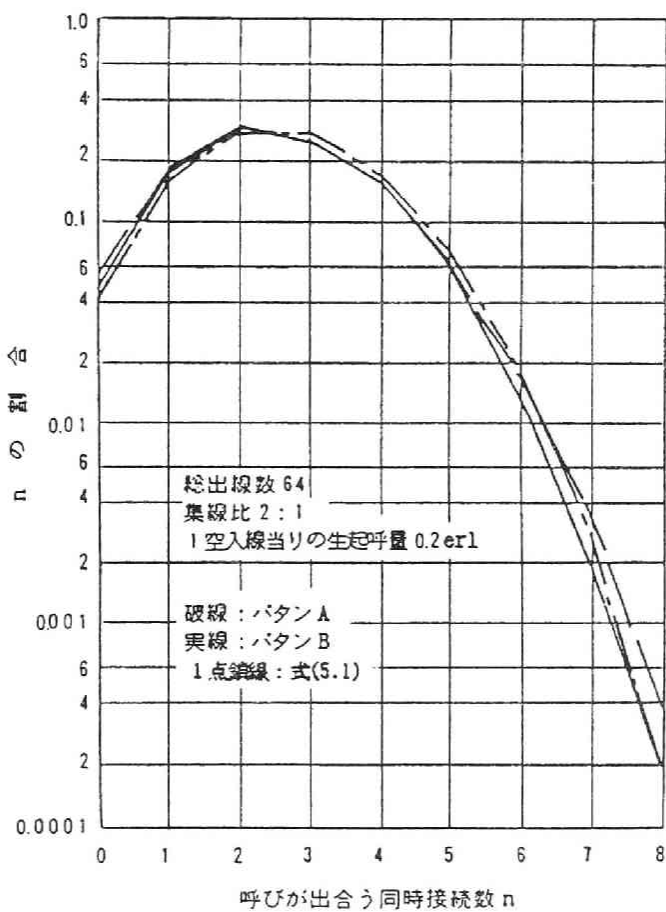


図 5.2 同時接続数分布 (2)

表 5.1 同時接続数分布 (3)

n	$\alpha=0.7$ erl			$\alpha=0.9$ erl		
	パターンA	パターンB	式(5.1)	パターンA	パターンB	式(5.1)
0	0.04966	0.04921	0.04597	0.01942	0.01836	0.01680
1	0.17756	0.17669	0.16783	0.09253	0.09101	0.08569
2	0.27946	0.28014	0.27466	0.20599	0.20499	0.19699
3	0.25866	0.25878	0.26348	0.26981	0.27310	0.26697
4	0.15370	0.15575	0.16226	0.22444	0.23035	0.23379
5	0.06228	0.06105	0.06579	0.12737	0.12532	0.13581
6	0.01566	0.01584	0.01718	0.04770	0.04571	0.05125
7	0.00275	0.00236	0.00265	0.01140	0.01004	0.01153
8	0.00027	0.00017	0.00018	0.00132	0.00111	0.00119

n : 呼びが出合う同時接続数

 α : 1 空き入線当りの生起呼量

表 5.2 同時接続数分布 (4)

n	$\alpha=0.05$ erl		$\alpha=0.075$ erl		$\alpha=0.10$ erl	
	パターンA、B	式(5.1)	パターンA、B	式(5.1)	パターンA、B	式(5.1)
0	0.02585	0.02486	0.00264	0.00241	0.00021	0.00015
1	0.11611	0.11201	0.02126	0.01970	0.00314	0.00201
2	0.23521	0.22750	0.08129	0.07374	0.01847	0.01234
3	0.27304	0.27249	0.17790	0.16552	0.06671	0.04651
4	0.20524	0.21092	0.25302	0.24483	0.15965	0.11871
5	0.10309	0.10829	0.23989	0.24594	0.25057	0.21323
6	0.03357	0.03611	0.15141	0.16527	0.26714	0.26940
7	0.00718	0.00717	0.06031	0.06876	0.17492	0.22804
8	0.00070	0.00065	0.01227	0.01384	0.05915	0.10960

n : 呼びが出合う同時接続数

 α : 1 空き入線当りの生起呼量

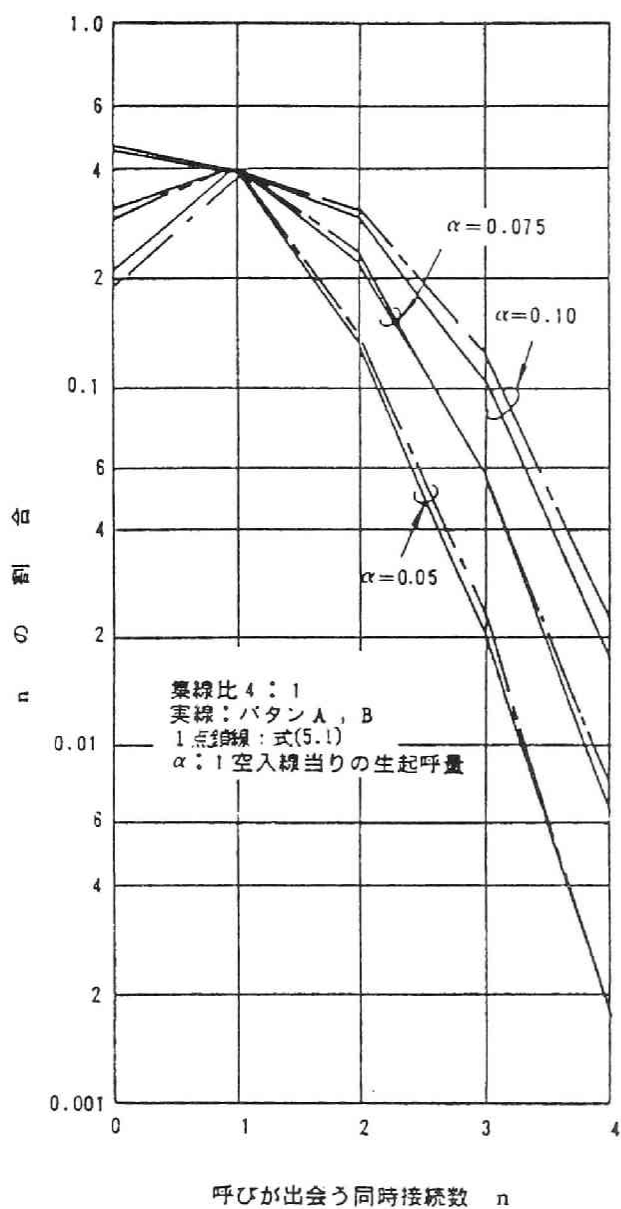


図 5.3 同時接続数分布(5)

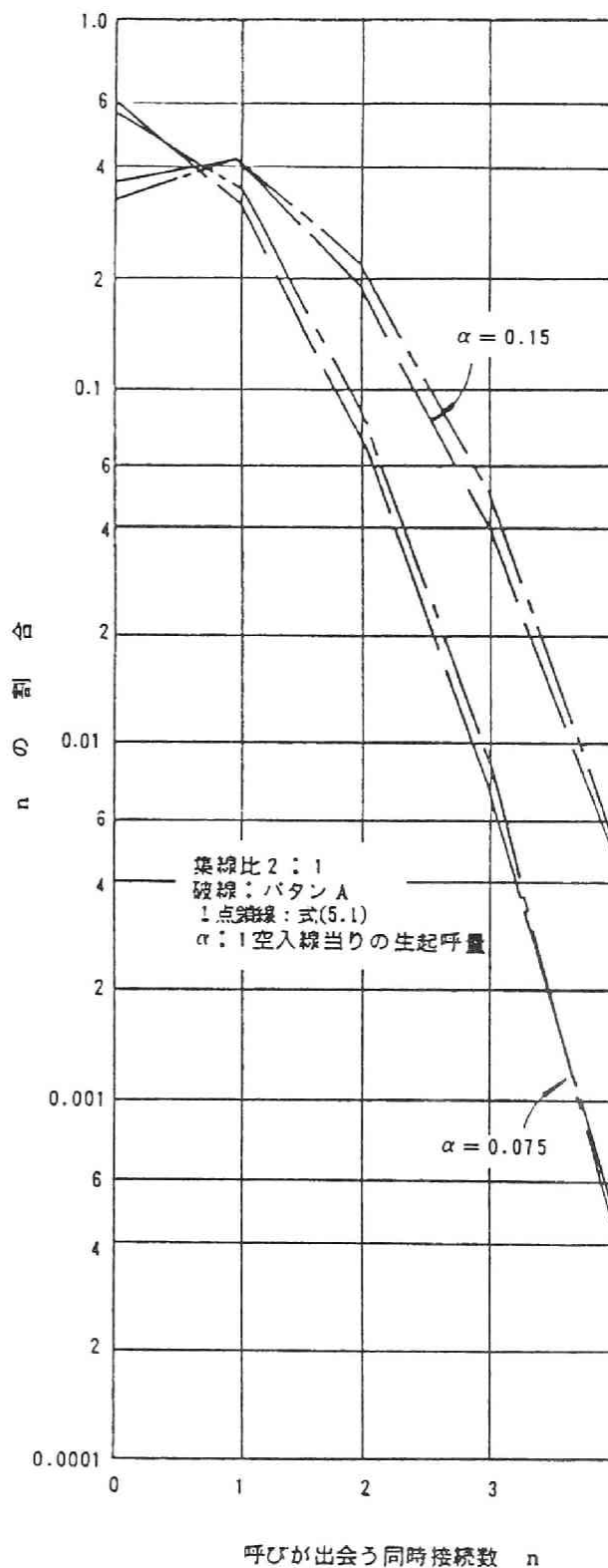


図 5.4 同時接続数分布(6)

5.3 トラヒック特性

各入線にかかる負荷が均等な場合には表 5.3に示されるように集線比 2:1、利用度 8 のパターン A、B は入線数 8 2、出線数 8 の完全線群格子よりも呼損率がずっと小さく、負荷が不均等な場合にも呼損率はふえない。たとえば、集線比 5:1 のパターン A で入線群 1~ 20 の 1 空き入線当りの生起呼量 $\alpha_1 = 0.04$ erl、入線群 21~ 40 の 1 空き入線当りの生起呼量 $\alpha_2 = 0.10$ erl (ただし 1 入線群当りの入線数 = 8) としたときの呼損率は 0.00026 ± 0.00007 となり表 5.3 の $\alpha = 0.07$ erl のときの値とほとんど差がない。

次に呼損率の分布について検討する。5000 呼毎の呼損率を 1 標本とし、41 標本をシミュレーションにより求める。負荷が均等な場合と不均等な場合の呼損率の平均に差があるかどうかを検定する目安として、呼損率の分布の正規性は疑わしいが、大標本における正規分布に従う 2 標本の母平均の差の検定法を用いる。正規分布に従う 2 標本の母平均が等しいならば

$$Z_0 = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| / \sqrt{(S_1^2 + S_2^2)/n} \quad (5.8)$$

表 5.3 呼 損 率 (呼 輻 輳 率)

	α	パターン A	パターン B	＊	
I	0.2	0.00037 ± 0.00004	0.00018 ± 0.00006	16	0.00107
	0.3	0.00382 ± 0.00033	0.00175 ± 0.00021	×	0.00827
	0.4	0.01669 ± 0.00070	0.00942 ± 0.00058	8	0.02741
II	0.07	0.00027 ± 0.00009	0.00017 ± 0.00006	40	0.00254
	0.09	0.00132 ± 0.00016	0.00111 ± 0.00018	×	0.00923
	0.15	0.03429 ± 0.00153	0.03151 ± 0.00127	8	0.07202
III	0.05	0.00070 ± 0.00012		64	0.00702
	0.075	0.01227 ± 0.00079		×	0.04198
	0.1	0.05915 ± 0.00175		8	0.10806

α : 1 空き入線当りの生起呼量

I : 集線比 2:1、II : 集線比 5:1、III : 集線比 8:1、

＊ : 入線数 n , 出線数 m ($n \times m$ と略記) の完全線群格子

± 以下は 5000 呼を 1 標本とし、41 標本での大標本法による 95% 信頼区間

は標準正規分布に従う。そこで

$\bar{x}_1, S_1^2 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0.07 \text{erl}$ の場合の呼損率の標本平均と標本分散

$\bar{x}_2, S_2^2 : \alpha_1 = 0.04 \text{erl}, \alpha_2 = 0.10 \text{erl}$ の場合の呼損率の標本平均と標本分散

$n = 41$: 標本数

として Z_0 を求めると 0.19 であり、標準正規分布の上側 5% 値 1.65 よりもずっと小さい。従って負荷が均等な場合と不均等な場合の呼損率の平均に差があるとはいえないことになる。ここで入線使用率 a_i と 1 空き入線当りの生起呼量 α_i の間には呼損率が小さいときは近似的に

$$a_i = \alpha_i / (1 + \alpha_i) \quad (5.9)$$

の関係があり、

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.07 \text{erl}$ のときには $a_1 = a_2 = 0.0654 \text{erl}$,

$\alpha_1 = 0.04 \text{erl}, \alpha_2 = 0.10 \text{erl}$ のときには $(a_1 + a_2) / 2 = 0.0647 \text{erl}$,

とほぼ平均入線使用率は等しい。

次に、集線比と呼量容量 C の関係について考える。各入線の負荷が均等な場合、式(5.9)と同様にの入線使用率 a と 1 空き入線当りの生起呼量 α の間には

$$a = \alpha / (1 + \alpha) \quad \text{すなわち} \quad \alpha = a / (1 - a)$$

の関係が近似的に成立ち、これを

式(5.1)に代入して呼損率 0.001 をみたす入線使用率 a^* を求める
集線比 $l : 1$ のときには入線使用率 a^* と出線使用率 β の間に

$$l a^* = \beta$$

の関係があることを利用して出線。

使用率 β を求め、表 5.4 に示す。

なお利用度 k が一定の場合には呼量容量 C は

$$C = k \beta / (1 - 0.001)$$

となり β に比例するので、 β が大きいほど呼量容量は大きいことになる。表 5.4 から均衡飛び複式結線形式は集線比の影響を受けにくいことがわかる。

表 5.4 集線比 $n:1$ の場合に呼損率 0.001 をみたす出線使用率 β

l	利用度 8		利用度 4	
	BSM	$8l \times 8$	BSM	$4l \times 4$
2	0.412	0.330	0.174	0.155
4	0.404	0.287	0.167	0.128
8	0.402	0.270	0.164	0.118
q/p^*	0.976	0.818	0.943	0.761

* p : $n = 2$ における β

q : $n = 8$ における β

次に、多段の通話路網におけるトラヒック特性を検討する。1 出方路内の出線が空いているにも係らず通話路網内部の空き経路が無いために呼損となる確率を内部ふくそう率と呼び、これが小さいほど望ましい。1 出方路 8 回線で 8 出方路から成り、初段で 3:1 集線を行う 3 段の図 5.5 で示される 6 形式を考える。但し、図 5.5 (a), (b), (f) は各方路の回線がどの 3 次格子に収容されるかにより内部ふくそう率が異なるため、最も内部ふくそう率が小さくなるよう、各 3 次格子の 8 出線は各出方路 1 回線ずつ 8 出方路に分配されるものとする。空き出線をランダムに選んだ場合の 1 空き入線当りの生起呼量 $0.2erl$ 時の内部ふくそう率を図 5.5 の各形式の上部に示す。これによると内部ふくそう率の大きさは

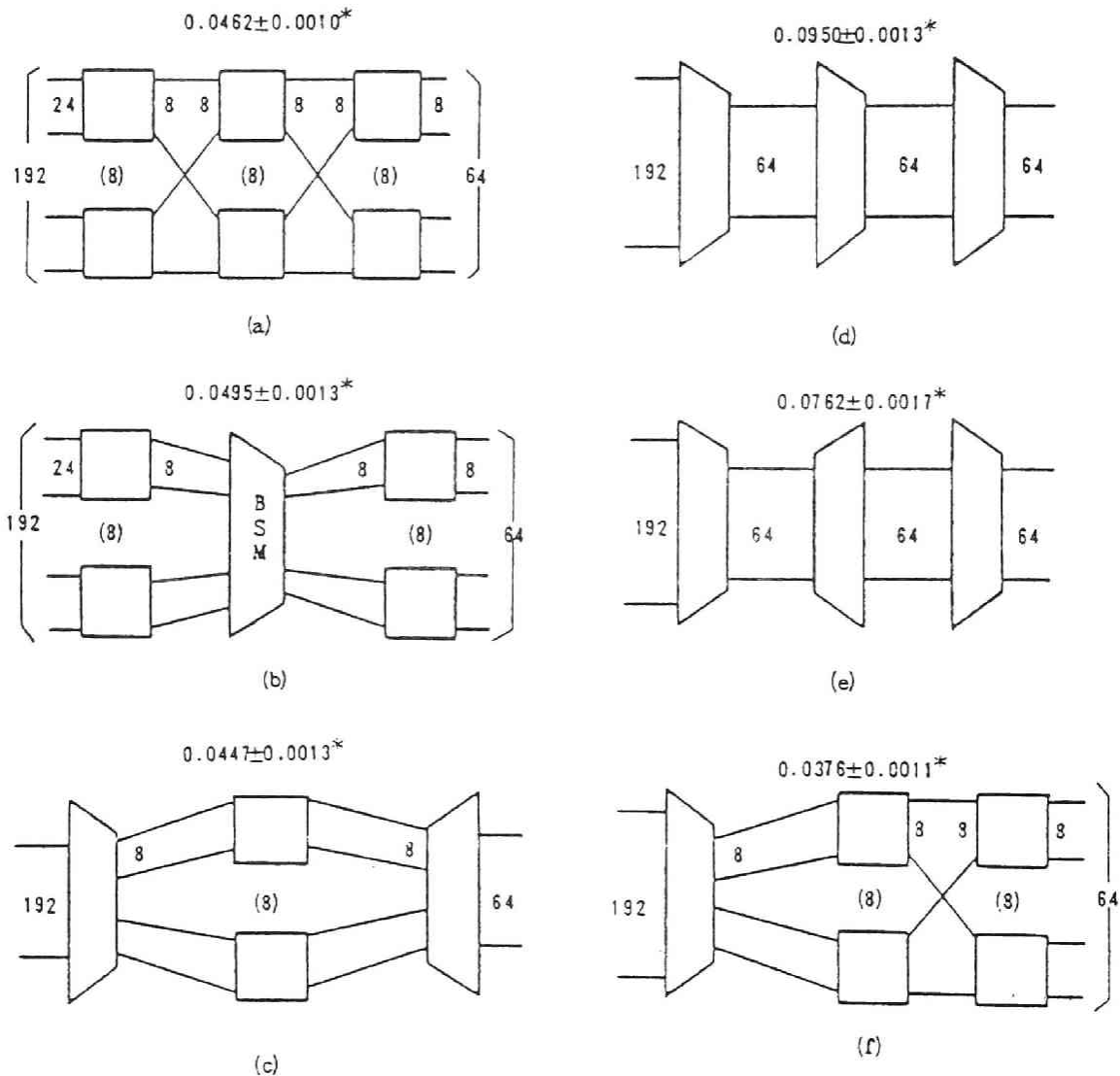


図 5.5 3 段の通話路網と内部ふくそう率
(* : 各形式の内部ふくそう率 $\pm 95\%$ 信頼区間)

(f) < (c) < (a) < (b) < (e) < (d)

の順であるが、(a), (b), (c), にはあまり差がなく、(d), (e) が他の形式よりも相当大きいので、[構成法4.5]で述べたようにBSMだけで通話路を構成するのは望ましくないことが実証された。また1出方路1回線としたときも全く同様の結果が得られ、1空き入線当りの生起呼量 $\alpha = 0.4$ erl (回線全閉塞による呼損が大きく、このときに通話路網で運ばれる呼量は1出方路8回線時の $\alpha = 0.2$ erl 時の運ばれる呼量に近い) 時の内部ふくそう率は

(a) : 0.0518 ± 0.0011 , (c) : 0.0492 ± 0.0011

$\alpha = 0.2$ erl 時の内部ふくそう率は

(a) : 0.00747 ± 0.00046 , (c) : 0.00555 ± 0.00029

$\alpha = 0.1$ erl 時の内部ふくそう率は

(a) : 0.000395 ± 0.000083 , (c) : 0.000185 ± 0.000060

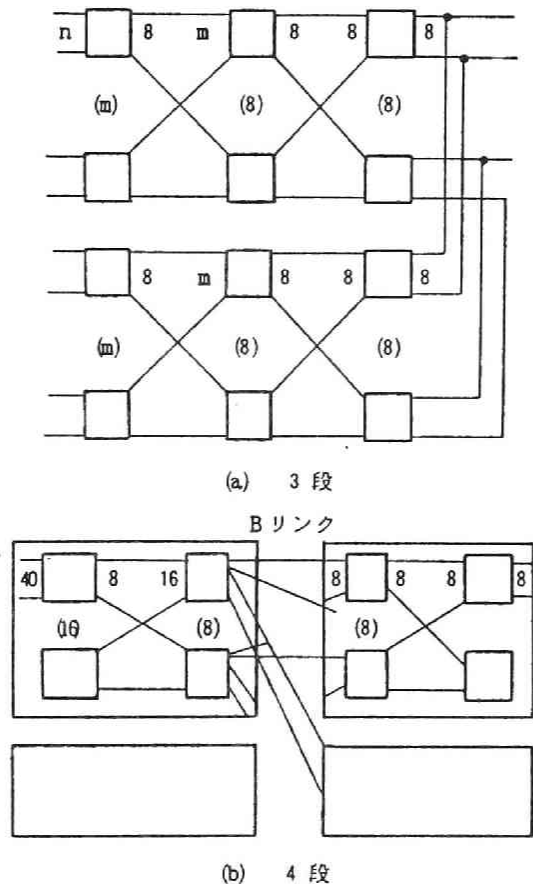


図 5.6 BSMを初段に適用する場合の比較対象とした通話路網

であり、両端にBSMを適用した(c)の方が全然BSMを適用しない(a)よりも望ましい形式であることは明らかである。

最後に多段の通話路網に対して

- (イ) 各段の同時接続数分布は独立とし、
- (ロ) 1次リンクの同時接続数分布として、BSMを採用する場合は式(5.1)〔ただし、入線使用率 a を $\alpha/(1+\alpha)$ で近似〕、完全線群格子の場合はEngset分布を用い、
- (ハ) 最終リンクの同時接続分布にはEngset分布、他のリンクには二項分布を用い、
- (ニ) 1出方路8回線に3.13erl(回線呼損率0.01)かかるものとして最大再整合〔再整合とはある出回線と入線との間の空き経路を見出せないとき、別の出回線との間の経路をさがすことを意味する〕回数4回の前提のもとで内部ふくそう率を求め、
- (ホ) 内部ふくそう率0.001をみたす呼量容量を求める。

表 5.5 内部ふくそう率0.001をみたす呼量容量

No	段数	条 件	(A)	(B)	(B)/(A)
1	3 段	$n=16, m=8, k=1$	20.54erl	24.45erl	1.19
2		$n=16, m=16, k=1$	35.58	37.70	1.06
3		$n=16, m=8, k=2$	41.34	49.28	1.19
4		$n=40, m=8, k=2$	35.33	48.64	1.38
5		$n=40, m=16, k=1$	32.38	37.44	1.16
6	4 段	第2段 2:1集線	67.20	75.52	1.12

(A) : 図5.6 で表される通話路網

(B) : 図5.6 で表される通話路網の初段にBSMを適用

図 5.6 に B S M を初段に適用する場合の比較対象とする通話路網形式を示し、表 5.5 にそれらの呼量容量を示す。また、同様の条件で D20 形交換機の初段に B S M を適用した場合の呼量容量を求めると、約 4% の呼量容量増となることがわかる。なお、上記計算法とシミュレーション結果とを比較すると、表 5.5、No.1, $n = 16$, $m = 8$, $k = 1$ (初段のみ 2:1 集線) の場合にはシミュレーションでは、

通常の通話路網の呼量容量(A) = 21.1erl ,

初段に B S M 適用時の呼量容量(B) = 24.9 erl

で (B)/(A) = 1.18 とほぼ計算結果と一致している。

以上のことから、B S M を集線のある通話路網の両端あるいは集線のある片側に適用すると入線の負荷が均衡している場合でも、呼量容量増が見込めることがわかる。

5.4 む す び

以上、考察してきたように、均衡飛び複式結線形式を多段の通話路網の両側または片側に用いたときには、

- (1) 呼損率の減少すなわち呼量容量の増加をもたらす
- (2) 全入線を 1 群としてみることができるとため入線間の負荷の不均衡を吸収
吸収でき、大きなスイッチを採用するのと同様の効果がもたらされ、
- (3) 集線比の影響を受けにくい

などの効果がある。

しかし、集線比が 1:1 の場合には、入線の負荷が均等であれば完全線群格子だけの形式よりも不利になる。その場合にも格子間の負荷が不均等であれば均衡飛び複式結線形式の方が有利になってくる。

多段の通話路網に対しては、どの段にも均衡飛び複式結線形式を適用できる可能性があるが、なるべく両端に適用した方がよく、さらに 2 段続けて適用してはいけないという制約がつく。

多段の通話路網の内部ふくそう率の計算法については、各段の同時接続数分布が独立という仮定が近似的に成り立つとすると前節 5.3 の (イ) ~ (ニ) で示した計算法はほぼ妥当であると言える。

6.1 ま え が き

1 段集線装置で各入線が全出線にアクセスできる方式では出線があいてさえいれば接続可能であるが、各入線が全出線のうちの一部にしかアクセスできず、接続できるか否かが他の入線による出線の占有状況に左右される方式では、入線と出線との対応づけが方式構成決定上の重要な問題の一つとなる。出線の選択順序が決まっている定位選択の場合には、更に出線の選択順序をどうするかという問題が加わり、一層問題が複雑となる。このように各入線が全出線のうちの一部にしかアクセスできない方式は第4章で述べたようにグレージングと呼ばれ、古くから研究されてきたが、そのトラヒック特性の解明は構造の複雑さのゆえに実験的近似手法に頼らざるを得なかった。

出線の選択順序が一定していない不定位選択グレージングでは差点素子やトランクなどの均等使用の利点があり、定位選択の場合に生じるパッキング効果すなわち効率的に呼をつめこむことにより出線が空いている確率が大きくなることなどを考慮する必要がなく、各入線がどの出線にアクセスできるかだけを考慮すればよい。

また、不定位選択するグレージングではどの出線についても複式入線群数が等しいグレージング（ホモジーニャスグレージングと呼ぶ）や、ほぼそれに近いグレージング（Pseudoホモジーニャスグレージングと呼ぶ）の方が後位の出線ほど複式入線群を増やしていく正階段結線形式などよりも良好なトラヒック特性をもつことがわかっているので、ホモジーニャスグレージングあるいはほぼそれに近いグレージングに对称をしばることができる。

最近、O.A.Pedersenはこれらの点に着目し、ブロック計画（ブロックと要素の対応方法）で用いられる生起行列を用いてグレージングの最適化を試みた。^{[30], [41]}そこでの評価尺度は経験的な尺度であるに過ぎず、グレージングの尺度としての理論的裏付けが望まれている。一方、実験計画法では配置の理論として配置の評価尺度も検討されており、すべての評価尺度に対して最適となるものは均衡不完備ブロック配置（以下 BIBD と略す）であることがわかっている。ところで前章では BIBD を利用した結線形式すなわち均衡飛び複式結線形式が良好なトラヒック特性を持つことを示した。このことは配置の理論における評価尺度が不定位選択するグレ

レージングの評価尺度としても使えることを予想させる。これらの観点にたって本章の節6.2 では対象とする集線方式を明らかにし、節6.3 では先ず、既存の評価手法として Pedersen の方法を紹介する。Pedersen の方法は配置の理論をほんの一部だけ利用しているが、本論文では今後の拡張性も考慮して全面的に配置の理論を応用するため、配置の理論とグレージングの対応づけを行い、新しいグレージングの評価尺度を提案する。節6.4 ではホモジーニャスなグレージングと pseudo ホモジーニャスなグレージングのそれぞれに対して節6.3 の各評価手法を適用し、それらを呼損率の立場から比較評価する。

6.2 対象とする集線方式

本論文では1段の不完全線群（全出線が使用中でなくても接続不能となる）集線方式を対象とする。以下でグレージングと呼ぶのはすべてこの1段集線装置を指している。グレージングは第4章の表4.1 に示した3要因により分類できる。ただし表4.1（C）の分類では入線群数と出線数によっては複式入線群数の一定なホモジーニャス・グレージングが実現できるとは限らずそれに準ずるものになることがあり、各々の出線がある個数かそれより1だけ少ない個数の入線群によって複式接続されている場合には pseudo ホモジーニャスであるという。

以下でとりあげるのは出線を不定位選択し、複式入線群数はすべての出線について等しいか、それに準ずるものであり、更に同一出レベルに属する出線だけを同一出方路に行く出線とすることにより、飛び複式は可能であるがすべりは許されない利用度一定のグレージングに限定する。

6.3 集線方式（グレージング）の評価法

以下ではグレージングの最適化問題を入線群と出線の良い対応づけを求める問題すなわち出線を固定したときの入線群の配置を求める問題〔D〕あるいは入線群を固定したときの出線の配置を求めるという〔D〕と双対な問題〔D*〕としてとらえることにする。

配置は生起行列 $N = [n_{ts}]$ で一意に定義することができる。ここで生起行列 $N = [n_{ts}]$ 及びこれから導かれる重複行列（overlap matrix） $L = [\lambda_{ij}]$ は次のように定義される。

n_{ts} : 出線 s が入線群 t の 1 出端子に結ばれていれば (入線群 t が出線 s にアクセス可能であれば) 1, そうでなければ 0

$$L = [\lambda_{ij}] = N \cdot N' \quad (N' \text{ は } N \text{ の転置行列})$$

すなわち、

λ_{ij} : 入線群 i と j とが共通にアクセスできる出線数

λ_{ii} : 入線群 i の利用度

である。

(1) Pedersenの方法^{[30], [41]}

Pedersenは幾つかの文献に表されたグレージングのトラヒック特性の検討結果をもとにして、「トラヒック特性は入線群対によって共有される出線数の分散が小さいほど良好であり、それは重複行列の非対角要素の2乗和をできるだけ小さくすることに対応する。」と述べている^[30]。このことは対角要素(利用度)が一定であるので

$$Q(v) = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \lambda_{ij}^2 \quad (6.1)$$

ただし、 v は入線群

を最小にするグレージングが最適であることを意味している。

このブロック計画 D に双対な計画 D^* は生起行列 N^* として N' 、重複行列 $L^* = [\lambda_{ij}^*]$ として、 $N'N$ を考えることにより

$$Q^*(b) = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^b (\lambda_{ij}^*)^2 \quad (6.2)$$

を最小にする問題になる。ただし、 b は出線数である。ここで

$$Q(v) = Q^*(b) \quad (6.3)$$

であることがわかっており、^[41]計画 D で Q を最小にすれば計画 D^* でも Q^* が最小になる。

更に表6.1に示されるように各出線を共有する入線群数(複式入線群数)が小さい場合(表6.1では2あるいは1)には

$$T = \sum_{i=1}^v \left(\sum_{j=1}^v \lambda_{ij} \right)^2 \quad (6.4)$$

なる評価尺度をとり、これをできるだけ小さくすることを入線群単位の重複度 $(\sum_j \lambda_{ij})$ を一様にすることを考えている。

これらの尺度で表 6.1の (a) と (b) 、(c) とは区別できるが、(b) と (c) とは区別できない。しかし、これはマルコフ連鎖の閉包の考え方により区別できる。すなわち $\lambda_{ij} > 0$ ならば j は i から到達可能と呼ばれ、入線群の集合 S に属する入線群からは、 S の外の入線群に到達可能でないと集合 S は閉じているとい

われ、ある集合 S を含む最小の閉じた集合を S の閉包という。表 6.1(b) では入線群 1,2,3 と入線群 4,5,6 とは異なる閉包に属するのに対し、(c) ではすべての入線群が同じ閉包に属する。(c) のようにすべての入線群で構成されるもの以外に閉包がない場合は既約であるといわれる。ここで

$$\sum_i \sum_j \lambda_{ij} \geq v \cdot k + 2 (v - 1) \quad (6.5)$$

v : 入線群数、 k : 利用度

であれば既約にすることができ、既約にできれば既約にした方がよいトラヒック特性が得られる。すなわち (b) よりも (c) の方がよいグレージングである。

(2) 配置の理論とグレージング^[32]

前項 (1) で述べた Pedersen の方法は配置の理論 (ブロック計画) で用いられる生起行列を、グレージングを一意に定義するためだけに用いている。し

表 6.1 Pedersen の方法による評価の例

	複式構成図	Q	T
a	入線番号 1 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 2 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 3 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 4 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 5 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 6 → ○ ○ ○ ○ ○ ○	1 6 2	3 0 6
b	1 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 2 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 3 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 4 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 5 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 6 → ○ ○ ○ ○ ○ ○	1 6 2	2 9 4
c	1 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 2 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 3 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 4 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 5 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ 6 → ○ ○ ○ ○ ○ ○	1 6 2	2 9 4

表 6.2 ブロック計画とグレージングの対照表

	ブロック計画 (配置の理論)	グレージング (複式結線形式)
生起行列 $N = (n_{ij})$ $i=1, \dots, v$ $j=1, \dots, b$	$n_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{ブロック } j \text{ で処理 } i \text{ が} \\ \text{施された観測値があるとき} \\ 0 : \text{そうでないとき} \end{cases}$	$n_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{トランク } j \text{ が入線群 } i \text{ の} \\ \text{出線に接続されているとき} \\ 0 : \text{そうでないとき} \end{cases}$ <p>双対な問題ではトランクと入線群の役割が逆になる。</p>
線形模型 $\underline{x} = \Phi \underline{\xi} + \Psi \underline{\eta} + \underline{\varepsilon}$	観測値 $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]'$ $n = k b = v r$: 全観測数 v : 処理数、 b : ブロック数、 k : ブロック内の処理数、 r : 任意の処理について、 それを含むブロックの数	トラヒック特性値 $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]'$ $n = k b = v r$ v : 入線群数、 b : トランク数、 k : 複式入線群数、 r : 利用度
$\Phi = [\phi_{\alpha i}]$ $\alpha=1, \dots, n$ $i=1, \dots, v$	$\phi_{\alpha i} = \begin{cases} 1 : x_{\alpha} \text{ が処理 } i \text{ を施され} \\ \text{た観測値であるとき} \\ 0 : \text{そうでないとき} \end{cases}$	$\phi_{\alpha i} = \begin{cases} 1 : x_{\alpha} \text{ が入線群 } i \text{ の影響を受ける} \\ \text{トラヒック特性値であるとき} \\ 0 : \text{そうでないとき} \end{cases}$
$\Psi = [\psi_{\alpha j}]$ $\alpha=1, \dots, n$ $j=1, \dots, b$	$\psi_{\alpha j} = \begin{cases} 1 : x_{\alpha} \text{ がブロック } j \text{ に属} \\ \text{する観測値であるとき} \\ 0 : \text{そうでないとき} \end{cases}$	$\psi_{\alpha j} = \begin{cases} 1 : x_{\alpha} \text{ がトランク } j \text{ の影響を受け} \\ \text{るトラヒック特性値であるとき} \\ 0 : \text{そうでないとき} \end{cases}$
$\underline{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_v]'$	ξ_i : 処理 i の観測値に及ぼす影響 (処理効果)	ξ_i : 入線群 i のトラヒック特性に及ぼす影響
$\underline{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_b]'$	η_j : ブロック j の観測値に及ぼす 影響 (ブロック効果)	η_j : トランク j のトラヒック特性に及ぼす影響
$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_v]'$	誤差項	誤差項

かしPedersenの方法でもブロック計画でも最適なものは均衡不完備ブロック配
 置 (BIBD) を用いるものであることがわかっている^[32]。したがって、プロ
 ック計画をそっくりグレージングに適用することが考えられる。実験結果との
 比較は次節にまわすこととし、ここでは表 6.2 に示すようにブロック計画^[32]
 とグレージングとの対応付け及びそこで用いられる理論を説明する。なお間接
 的に関連する性質やその証明などは付録2に示す。

生起行列 N の元の間には

$$\sum_{i=1}^v n_{ij} = k_j \quad (\text{ブロックの大きさ [複式入線群数]、ホモジニアスな
グレージングでは一定値 } k) \quad (6.6)$$

$$\sum_{j=1}^v n_{ij} = r_i \quad (\text{処理 } i \text{ を含むブロックの数 [利用度]、
本章では一定値 } r) \quad (6.7)$$

の関係があり、

$$N = \Phi' \cdot \Psi = \left[\sum_{\alpha=1}^n \phi_{i\alpha} \psi_{\alpha j} \right] \quad (6.8)$$

である。

ブロック j で処理 i を施した場合の観測値 X_{α} は

$$X_{\alpha} = \xi_i + \eta_j + \epsilon_{\alpha} \quad (6.9)$$

で与えられる。 ξ_i ($i=1,2,\dots,v$) は処理効果、 η_j ($j=1,2,\dots,b$) はブロック効果と呼ばれ、 ϵ_{α} は互いに独立な誤差項で

$$E(\epsilon_{\alpha}) = 0, V(\epsilon_{\alpha}) = \sigma^2 \quad (\alpha=1,2,\dots,n) \quad (6.10)$$

である。式(6.9)を行列表現すると

$$\underline{X} = [\Phi \cdot \Psi] \begin{bmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\eta} \end{bmatrix} + \underline{\epsilon} \quad (6.11)$$

($\underline{X}, \Phi, \Psi, \underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\epsilon}$ の意味は表6.2 参照)

となる。

実験を行うとき、ブロックの効果は可変にできないが、ブロック内の処理を入れかえることにより処理効果は可変にできる。このような意味で各種の配置の中から特定の配置を選んでいく指針として処理効果の比較が考えられる。処理効果全体を比較するためには処理効果のある結合(線形結合を対比と呼ぶ)を比較しなければならない。そこで一般的なものとして

$$\pi = b' \cdot \xi, \quad [b' \cdot J_v = 0, b' \cdot b = 1] \quad (6.12)$$

但し、 $b = (b_1, b_2, \dots, b_v)'$ 、 $J_v = (1, \dots, 1)'$

なる形をした標準化対比とばれる π を比較する。良い配置とは標準化対比の推定量の分散をある意味(後述)で最小にするものであると考える。

$$\underline{x} = A \underline{\mu} + \underline{\epsilon} \quad (6.13)$$

$$A = [\Phi \Psi], \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

に対して、 $\pi = \underline{b}' \cdot \underline{\mu}$ の BLUE (最良線形不偏推定量: 不偏な推定量のうちで分散が最小なもの) は正規方程式

$$A' A \underline{\mu} = A' \underline{x} \quad (6.15)$$

をみたす $\hat{\underline{\mu}}$ によって与えられる。

ここで

$$D_r = \Phi' \Phi = \begin{bmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_v \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$D_k = \Psi' \Psi = \begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_b \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$C = D_r - N D_k^{-1} N$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 - \sum_{j=1}^b (n_{1j})^2 / k_j, & -\sum_{j=1}^b n_{1j} n_{2j} / k_j, & \dots, & -\sum_{j=1}^b n_{1j} n_{vj} / k_j \\ -\sum_{j=1}^b n_{2j} n_{1j} / k_j, & r_2 - \sum_{j=1}^b (n_{2j})^2 / k_j, & \dots, & -\sum_{j=1}^b n_{2j} n_{vj} / k_j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\sum_{j=1}^b n_{vj} n_{1j} / k_j, & -\sum_{j=1}^b n_{vj} n_{2j} / k_j, & \dots, & r_v - \sum_{j=1}^b (n_{vj})^2 / k_j \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

と置き、式(6.15)に式(6.14)を代入し、処理効果 $\hat{\xi}$ についてまとめると

$$C \cdot \hat{\xi} = (\Phi' - N D_k^{-1} \Psi') x \quad (6.19)$$

となる。ここで行列Cは正規化行列と呼ばれ、次のことがわかっている。

〔性質 1〕 対比がすべて推定可能すなわち不偏推定量が存在するための必要十分条件は、

$$\text{rank } C \text{ (行列 } C \text{ の階数)} = v-1$$

である。

〔性質 2〕 \underline{q}_i を正規化行列 C の 0 でない固有根 $\rho_i > 0$ に対する固有ベクトルとすると

$$\pi_i = \underline{q}_i' \underline{\xi} \quad (6.20)$$

は推定可能であって、そのときの推定量

$$\hat{\pi}_i = \underline{q}_i' \hat{\underline{\xi}} \quad (6.21)$$

の分散は σ^2 / ρ_i である。但し、 σ^2 は式(6.10)で与えられる誤差項の分散である。

〔性質 3〕 正規化行列 C の階数を h とすると h 個の固有ベクトルに対応する h 個の母数 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_h$ が推定可能であり、推定量

$$\hat{\underline{\pi}} = (\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots, \hat{\pi}_h)' \quad (6.22)$$

の分散、共分散行列 $V(\hat{\underline{\pi}})$ は

$$V(\hat{\underline{\pi}}) = \begin{bmatrix} \rho_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_h^{-1} \end{bmatrix} \sigma^2 \quad (6.23)$$

で与えられる。

〔性質 4〕 $\text{rank } C = v-1$ のときには任意の $\underline{\xi}$ の標準化対比

$$\pi = \underline{b}' \cdot \underline{\xi} \quad (6.24)$$

が推定可能で、その BLUE は

$$\hat{\pi} = \sum_i^{v-1} t_i \underline{q}_i' \hat{\underline{\xi}} \quad (6.25)$$

で与えられ、BLUE の分散は

$$V(\hat{\pi}) = \sum_{i=1}^{v-1} \frac{t_i^2}{\rho_i} \sigma^2 \quad (6.26)$$

で与えられる。

連結という概念も後に利用する。

《連結》 $N = [n_{ij}]$ をある配置の生起行列とする。

入線群 i_0 と入線群 i_k は

$$n_{i_0 j_1} > 0, n_{i_1 j_1} > 0, \dots, n_{i_{k-1} j_k} > 0, n_{i_k j_k} > 0$$

なる列 $n_{i_0 j_1}, n_{i_1 j_1}, \dots, n_{i_k j_k}$ が存在するとき連結であるという。

任意の入線群対が連結であるとき、配置は連結であるという。

配置が連結であるときには全入線群からなる集合だけが閉包（すなわち既約）になっている。また配置が連結であるときには $\text{rank } C = v-1$ である。すなわち〔性質 1〕で述べた対比がすべて推定可能という条件と Pedersen の方法における既約という概念が一致したわけである。配置が連結でないときには、

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & O \\ O & N_1 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

のようにいくつかの連結型の部分に分けることができる。このことはまた閉包がいくつかあるかに対応するわけである。配置が連結であれば、配置の最適化条件として正規化行列 C の固有値 ρ_i ($i=1, 2, \dots, v-1$) に対して

〔I〕 $\prod_i \rho_i$ を最大にする

〔II〕 $\min_i \rho_i$ を最大にする

ことなどが考えられる。〔I〕は〔性質 3〕からわかるように推定量 $\hat{\pi}$ の一般化分散（分散、共分散行列の行列式）

$$|V(\hat{\pi})| = \sigma^2 / \prod_{i=1}^{v-1} \rho_i \quad (6.28)$$

を最小にすることに対応し、〔II〕は式(6.26)および標準化対比の条件 $\underline{b} \cdot \underline{b}' = 1$ より

$$V(\hat{\pi}) = \sum_{i=1}^{v-1} \frac{t_i^2}{\rho_i} \sigma^2 \leq \frac{\sum_i t_i^2}{\min_i \rho_i} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\min_i \rho_i} \quad (6.29)$$

であること、 $\sigma^2 / \min_i \rho_i$ は $\min_i \rho_i$ に対する C の固有ベクトルを \underline{q}_k とするとき $\pi_k = \underline{q}_k' \cdot \underline{\xi}$ によって実現されることから、すべての標準化対比の BLUE の分散の最大値 $\sigma^2 / \min_i \rho_i$ を最小にすることに対応する。

配置が連結でないときには連結な入線群間（最小閉包）のみで〔I〕〔II〕による最適化を行なえばよい。

正規化行列 C は実対称行列であるので Givens - Householder 法、たとえば DEMOS-E でのサブルーチン DESIGN3 などにより容易に固有値を求めることができ、それを用いて $\prod_i \rho_i$ 、 $\min_i \rho_i$ を同じ階数（最小閉包数が同じ）の行列同士で比較することができる。また、異なる階数間では階数が大、すなわち最小閉包数が小さいほど良い配置となる。表 6.2 におけるブロック計画とグレーディングとの対応づけでは、

処理 : 入線群、 ブロック : 出線

なる対応付け〔D〕を行ない、処理効果だけを可変とした。これは出線の配置を固定してそれぞれの出線にアクセスできる入線群の組合せ（配置）を可変にすることを意味する。逆に入線群の配置を固定してそれぞれの入線群がアクセスできる出線の組合せ（配置）を可変と考えることもできる。その場合には処理効果を固定してブロック効果を可変とすればよい。すなわち式 (6.15) を $\underline{\xi}$ について解く代りに $\underline{\eta}$ について解くことにすればよい。これに対して Pedersen の方法で計画〔D〕と双対な計画〔D*〕を考えたのと同様に対応付け自身を変え

処理 : 入線群、 ブロック : 出線

なる新しい対応付け〔D*〕を行い、生起行列 N^* を

$$N^* = N$$

とすれば、これまで述べてきた議論の N を N^* で置きかえるだけで全く同様の議論を展開できる。この新しい対応付け〔D*〕の方が直感と結びつけやすいかも知れない。

対応付け〔D〕で連結である 2 入線群 i_1, i_k には r 個（利用度）ずつの

出線が対応しており、表 6.2 の n_{ij} の定義から

$$\left. \begin{array}{l} n_{i_1 h_{11}}, n_{i_1 h_{12}}, \dots, n_{i_1 h_{1a}}, \dots, n_{i_1 h_{1r}} > 0 \\ n_{i_k h_{k1}}, n_{i_k h_{k2}}, \dots, n_{i_k h_{kj}}, \dots, n_{i_k h_{kr}} > 0 \end{array} \right] \quad (6.30)$$

であり、《連結》の定義より

$$n_{i_1 h_{1a}}, n_{i_2 h_{1a}}, n_{i_2 h_{2b}}, \dots, n_{i_{k-1} h_{kj}}, n_{i_k h_{kj}} > 0 \quad (6.31)$$

なる列が存在する。〔D*〕の生起行列 $N^* = N'$ に対しては式(6.30)、(6.31)

より

$$\left. \begin{array}{l} n_{h_{11} i_1}^*, n_{h_{12} i_1}^*, \dots, n_{h_{1a} i_1}^*, \dots, n_{h_{1r} i_1}^* > 0 \\ n_{h_{k1} i_k}^*, n_{h_{k2} i_k}^*, \dots, n_{h_{kj} i_k}^*, \dots, n_{h_{kr} i_k}^* > 0 \\ n_{h_{1a} i_1}^*, n_{h_{1a} i_2}^*, n_{h_{2b} i_2}^*, \dots, n_{h_{kj} i_{k-1}}^*, \dots, n_{h_{kj} i_k}^* > 0 \end{array} \right] \quad (6.32)$$

である。したがって

$$n_{h_{1p} i_1}^*, n_{h_{1a} i_1}^*, n_{h_{1a} i_2}^*, \dots, n_{h_{kj} i_k}^*, n_{h_{kq} i_k}^* > 0 \quad (6.33)$$

$$p = 1, 2, \dots, r ; q = 1, 2, \dots, r$$

なる列が存在し、〔D〕で連結である任意の 2 入線群 i_1, i_k にアクセスされるトランク h_{1p}, h_{kq} ($p, q = 1, 2, \dots, r$) は〔D*〕で互いに連結である。

このことから

$$\text{rank } C = v - k \text{ であれば } \text{rank } C^* = b - k$$

であることがわかる。ただし C^* は対応付け〔D*〕での正規化行列である。

〔例〕 各入線群がアクセスし得る出線番号を

$$\begin{array}{l} \rightarrow 1, 7, \left[\begin{array}{c} 13 \\ 14 \\ 13 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 17 & 21 \\ 18 & 21 \\ 18 & 22 \end{array} \right] \uparrow \\ \rightarrow 2, 8, \left[\begin{array}{c} 14 \\ 13 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 18 & 21 \\ 19 & 22 \end{array} \right] \text{ 閉包} \\ \rightarrow 3, 9, \left[\begin{array}{c} 13 \\ 14 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 18 & 22 \\ 19 & 22 \end{array} \right] \\ \rightarrow 4, 10, 14 \left[\begin{array}{cc} 19 & 22 \\ 17 & 23 \end{array} \right] \downarrow \\ \rightarrow 5, 11, 15 \left[\begin{array}{cc} 17 & 23 \\ 20 & 24 \end{array} \right] \\ \rightarrow 6, 12, 16 \quad 20 \quad 24 \end{array}$$

とする。これは入線群数 $v=6$ 、出線群数 $b=24$ の pseudo ホモジーニャ

スなグレーディングの一例である。

対応付け〔D〕の場合に生起行列Nは、

$$N = \begin{matrix} & & & & & & & & & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & & & & 1 & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & & & & 1 & & 1 & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & & & & & 1 & & 1 & & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

であり、式(6.6)の k_j 、式(6.7)の r_i は

$j=1, \dots, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24$ に対して $k_j = 1$ 、

$j=13, 14, 17, 18, 21, 22$ に対して $k_j = 2$ 、

$i=1, 2, \dots, 6$ に対して $r_i = 5$

である。式(6.18)より

$$C = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。この生起行列Cは

$$\text{rank } C = 4$$

であり、固有値は

2,

$$2 \sqrt[3]{t} \cos(\theta/3) + 4/3 \quad [=2.241],$$

$$2 \sqrt[3]{t} \cos\{(\theta+2\pi)/3\} + 4/3 \quad [=0.415],$$

$$2 \sqrt[3]{t} \cos\{(\theta+4\pi)/3\} + 4/3 \quad [=1.344],$$

$$\text{但し、} t = 10^3 / (2^3 \times 3^3), \quad \cos \theta = -1/10^3$$

である。したがって配置は連結ではなく、0を除く固有値に対しては、

$$\prod_i \rho_i = 0.415$$

$$\min_i \rho_i = 2.5$$

であることがわかる。

双対な問題（対応付け〔D*〕）では生起行列N*は

$$N^* = N'$$

であり、

$$\text{rank } C = 22, \min_i \rho_i^* = 0.094, \prod_i \rho_i^* = 0.195$$

であることを DEMOS-E サブルーチン DEIGN 3を用いて算出することができる。

再び表6.1の Pedersenの方法による評価例を参照する。Pedersenは

(a) Qの値が小さいほどよいグレージング、

(b) Qが同じときにはTが小さいほどよいグレージング、

(c) Q、Tが同じときには最小閉包の数が少ないほどよいグレージング

としたが、最初に最小閉包の数を比較し、その後にQ、Tを比較しても評価結果は矛盾しない。すなわち配置の理論を用いるときには

(イ) 階数が大きい程よいグレージング、

(ロ) 階数が同じときには0でない固有値 ρ_i に対して $\prod_i \rho_i$ が大きい程、

$\min_i \rho_i$ が大きい程、よいグレージング

とすればよい。

(3) BIBDとグレージング

正規化行列Cの固有値が

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{v-1} = (n-b)/(v-1)$$

で $n_{ij} = 1$ 又は0（この条件は生起行列の定義により満足されている）ならば、項(2)で述べた評価尺度〔I〕（ $\prod \rho_i$ の最大化）、〔II〕（ $\min \rho_i$ の最大化）のいずれに対しても最適な配置となることがわかっている。^{[30]、[40]}特にブロックの大きさ k_j と処理の繰返し数 r_i が j, i によらず一定値 k, r であるときには重複行列の元 λ_{ij} は i, j によらず一定値 λ となる。このような配置は均衡不完備ブロック配置(BIBD)と呼ばれる。BIBDが存在するための必要条件としては、

$$v \cdot r = k \cdot b, \lambda(v-1) = r(k-1), v \leq b, r \leq k \quad (6.34)$$

のほか、幾つかが明らかにされているが、必要十分条件はまだわかっていない。

ところで対応付け〔D〕で $v \leq b$ であれば、それと双対な対応付け〔D*〕では $v^*(=b) \geq b^*(=v)$ となり、対応付け〔D〕、〔D*〕で共に BIBD となることはない。たとえば $v=9, b=12, r=4, \lambda=1$ となる図 6.1(a) の BIBD に対して対応付け〔D〕を行なったときのグレージングは図 6.1(b) で表される。このグレージングを対応付け〔D*〕としてみると、同一出レベルにある出線は同一ブロックに含まれない、すなわち同一入線群にアクセスされることはないため

$$\lambda_{ij}^* = 1 \text{ (異なる出レベルに属する出線 } i \text{ と } j \text{)}$$

$$= 0 \text{ (同一出レベルに属する出線 } i \text{ と } j \text{)}$$

となり、対応付け〔D*〕では BIBD ではない。すなわち対応付け〔D〕、対応付け〔D*〕共に最適とする BIBD は $v \approx b$ であれば存在しないわけである。

ところで出レベル II を除いたグレージングは対応付け〔D〕と〔D*〕で、

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\ 1, 4, 7, 2, 8, 5, 3, 6, 9 \end{pmatrix}$$

なる置換を施せば同じブロック計画を表すことになる。すなわち対応付け〔D〕、〔D*〕の両方からみた場合には BIBD の一部 (たとえば図 6.1(a) の II) を除去し、

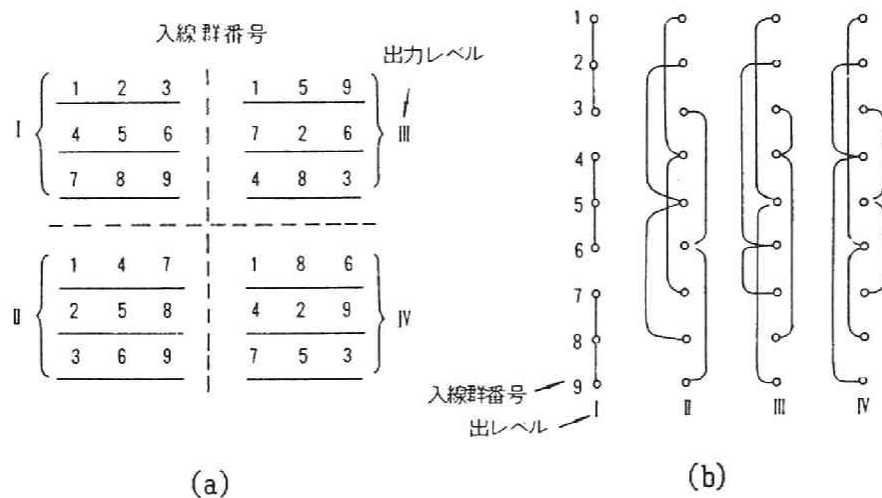


図 6.1 BIBD ($v=9, b=12, k=3, r=4, \lambda=1$) から得られるグレージング

ブロック数=処理数（入線群数=出線数）

としたものがつり合いがとれている。

k が素数のべき乗で v が k^2 すなわち素数の偶数べき乗のときには次の性質

(A) ~ (D) を持つ BIBD（これを BIBD-I と呼ぶ）を構成することができる。

(A) 処理数 v 、ブロック数 $= k^2 + k$ 、ブロック内の処理数 k 、任意の処理についてそれを含むブロックの数 $r = k + 1$ 、処理 i と処理 j が同一ブロックに現れる回数（会合数） $\lambda_{ij} = 1$

(B) k 個ずつのブロックの集合 L_1, L_2, \dots, L_{k+1} に分割することができる。

(C) 各 L_i はすべての処理を含む。

(D) L_1 を k 行 k 列の行列（各行は各ブロックに対応）とみるとき、 L_1 と L_2 とは行と列とを入換えた関係にある（たとえば図 6.1(a) の I と II）。

この BIBD-I の L_2 を除くすべてのブロックを使って構成されるグレージングがつりあいのとれた配置となる（このグレージングが第 4 章で述べた均衡飛び複式結線形式である）。

BIBD は先にも述べたように v と b の値によっては存在しないことがある。たとえば入線群数 40、出線数 64 の場合には対応付け [D]、[D*] のいずれに対しても BIBD-I は存在しない。そこで出線数あるいは入線群数のどちらかが一致する BIBD-I を利用することが考えられる。次節ではまずホモジーニャスな場合に BIBD-I を利用した幾つかのグレージングと他の幾つかのグレージングを比較し、次に pseudo ホモジーニャスな場合を検討する。

6.4 グレージングの評価

(1) ホモジーニャスなグレージングの場合

総入線数 320、総出線数 64、利用率 8 のグレージング（グレージング G と呼ぶ）を 40 個の 8×8 格子（入線群数 40、1 入線群当りの入線数 8）の出線の複式接続により構成する場合（集線比 5:1）を考える。対応付け [D*] を行なうと利用率 $k^* = 8$ は素数のべき乗となるので、 $v^* = (k^*)^2$ の BIBD-I が存在する。この BIBD-I のブロックの集合 $L_1, L_2, \dots, L_{k^*+1}$ の一部を利用する。比較する複式接続パターンは、各入線群がアクセスし得る出線の集合をブロックに対応させるとき、次の特徴を持つ。

(A) : BIBD-Iのうち、 L_1, L_3, L_4, L_5, L_6 の 40 個のブロックを使用。
 (A') : パタン(A) とほぼ等しいが、若干の出線対に対しては、 $\lambda_{ij}^* = 2$ となる (AT&Tの交換機 No. 3 ESS タイプ)。

(A1)、(A2)、(C) : 少数の L_i を繰返し使用。

(A1) : L_1, L_3, L_1, L_3, L_1 の 40 個のブロック、

(A2) : L_1, L_3, L_4, L_1, L_3 の 40 個のブロック、

(C) : L_1 を 5回使用。

(A-4) : 4 出線単位すなわち $v^*=16, k^*=2$ として各入線は4 本ずつの出線の集合 i と $\{(n+i-2) \bmod 8 + 9\}$ にアクセスできる。ただし、 $i=1, 2, \dots, 8; n=1, \dots, 5$ である。

なお、パタン(C) は 5個の複式接続しない 40×8 の格子スイッチを意味し、理論的に解析できる。比較のため 1入線群 5入線で構成した狭義のBSMも考える。64入線群の各々がアクセスしうる出線の集合は L_2 以外のすべての L_i で示すこととし、パタン(B) と呼ぶ。

パタン(B) 以外のグレージングGは

$$v(=b^*)=40, \quad b(=v^*)=64, k(=r^*)=5, r(=k^*)=8, n(=v-r=b-k)=320$$

である。文献[30]、[41]より

$$r(k-1) < v-1$$

のときには

$$\min Q = \min Q^* = v \cdot r^2 + v \cdot r(k-1) = n(r+k-1) \quad (6.35)$$

$$\min T = (v \cdot r \cdot k)^2 / v = (n \cdot k)^2 / v \quad (6.36)$$

$$\min T^* = (n \cdot k^*)^2 / v^* = (n \cdot r)^2 / b \quad (6.37)$$

であることがわかっている。したがってグレージングGでは

$$\text{rank } N = 63, \text{ rank } N^* = 39,$$

$$\min Q = \min Q^* = 3840,$$

$$\min T = 64000, \min T^* = 102400$$

であることがわかる。表 6.3にグレージングGの各パターンの評価尺度の計算結果を示す。パタン(A) は Pedersen の方法では、最適なグレージングであることがわかる。表6.3 のシミュレーションによる呼びふくそう率IBと各価尺度による評価結果とを比較する。

表 6.3 ホモジーニャスなグレージングの場合の各評価尺度の計算結果
(総入線数320,総出線数64、利用度8)

		A	A'	A2	A1	A-4	C	B
各 評 価 尺 度 の 計 算 値	$Q=Q^*$	3,840	4,608	5,632	7,345	7,680	12,800	7,680
	T^*	102,400	102,400	102,400	101,271	102,400	102,400	262,144
	階数 *	39	39	39	39	39	32	63
	$\Pi \rho_i^*$	6.74×10^{31}	4.58×10^{31}	2.73×10^{31}	6.53×10^{30}	5.20×10^{30}	7.92×10^{28}	4.44×10^{53}
	$\min \rho_i^*$	6.4	4.8	4.8	3.12	2.07	8	7
	T	64,000	64,000	64,000	63,309	64,000	64,000	262,144
	階数	63	63	63	63	63	56	63
	$\Pi \rho_i$	4.40×10^{40}	2.99×10^{40}	1.78×10^{40}	3.90×10^{39}	3.40×10^{39}	1.39×10^{39}	4.44×10^{53}
	$\min \rho_i$	4	3	3	2	1.29	5	7
	IB	0.0343 ± 0.0015	0.0356 ± 0.0015	0.0405 ± 0.0013	0.0475 ± 0.0017	0.0480 ± 0.0013	0.0720	0.0315 ± 0.0013

IB: 1空き入線当りの生起呼量0.15erl 時の呼びふくそう率。但し、Cは Engset の損失式により求めた。

(i) Pedersen の方法では、 Q の値による評価順位と呼びくそう率の大きさによる順位とが一致し、

(ii) 正規化行列の固有値を用いる方法では、 $\Pi \rho_i$ または $\Pi \rho_i^*$ による方法の方が $\min \rho_i$ または $\min \rho_i^*$ による方法よりも強力である。しかし、 $\Pi \rho_i$ による順位付けと、階数と $\min \rho_i$ の両方を用いた順位付けとは矛盾していない。

表 6.4に総入線数 256、総出線数 64、利用度 8のグレージングHの各評価尺度の計算結果を示す。式(6.35)~(6.37)より、

$$\min Q = \min Q^* = 2816,$$

$$\min T = 32768, \min T^* = 65536$$

であり、パターン(A)はPedersenの方法で最適なグレージングであることがわかる。なお各パターンともグレージングGにおける最後のブロック集合[(A)では

表 6.4 ホモジーニャスなグレージングの場合の各評価尺度の計算結果
(総入線数256,総出線数64、利用度8)

	A	A'	A2	A1	A-4	C	
$Q=Q^*$	2,816	3,328	3,712	4,608	5,120	8,192	
T^*	65,536	65,536	65,536	65,536	65,536	65,536	↑ D ↓
階数 *	31	31	31	31	31	24	
$\Pi \rho_i^*$	3.14×10^{24}	1.97×10^{24}	1.38×10^{24}	6.04×10^{23}	1.71×10^{23}	4.72×10^{21}	
$\min \rho_i^*$	6	4	4	4	1.39	8	
T	32,768	32,768	32,768	32,768	32,768	32,768	↑ D ↓
階数	63	63	63	63	63	56	
$\Pi \rho_i$	2.70×10^{34}	1.69×10^{34}	1.18×10^{34}	5.19×10^{33}	1.47×10^{33}	5.19×10^{33}	
$\min \rho_i$	3	2	2	2	0.69	4	

L_6 、(A1)では L_1 、(A2)、(c)では最後の L_1 を除去した複式接続パターンになっている。パターン(A1)は、 L_1 と L_3 の両方を使用しており、パターン(C)は L_1 だけの繰返しであり、定性的にパターン(A1)の方がすぐれている。パターン(A-4)は出線が4本単位、パターン(C)は入線が5本単位になっており、定性的には判断がつかないため、シミュレーションにより比較した結果、(A-4)の方がすぐれていることがわかった。すなわち Pedersen の方法による順位付けは妥当である。

しかし、対応付け〔D〕ではパターン(A-4)の $\Pi \rho_i$ とパターン(C)の $\Pi \rho_i$ とは逆転していた。この場合には階数による比較を第1順位にしておけば矛盾しない。階数を用いないときには $\Pi \rho_i \times \Pi \rho_j^*$ が大きいほどよいグレージングと考えてもよい。 $\Pi \rho_i$ と $\Pi \rho_j^*$ とを別々に用いるよりも、 $\Pi \rho_i \times \Pi \rho_j^*$ の方が対応付け〔D〕と〔D*〕を総合的に評価するという点では望ましいと思われる。以上の検討から、ホモジーニャスなグレージングでは、正規化行列の階数が大きいほど良いグレージングであり、階数が同じ場合には正規化行列C、C*の0でない固有値の積 $\Pi \rho_i \times \Pi \rho_j^*$ が大きいほど良いグレージング

であると言える。なお、グレージングGで入線群数を増やしたパターン(B)は最も良好なトラヒック特性を示すが、いずれの尺度も入線群数が等しい場合の比較しかできず、パターン(B)も含めて比較するためには、1入線群を構成する入線数 m を1入線群1入線と考えた場合の繰返し数 m とみなして比較しなければならない。しかしその場合には生起行列が大きくなりすぎる欠点があり、今後の検討課題である。

(2) Pseudoホモジーニャスなグレージングの場合

表 6.5 に示す複式入線群数が小さい Pedersenの方法での評価順位順に並べた7つのパターンを考える。各評価尺度の計算結果とトラヒック特性を表 6.6 に示す。これによると評価尺度の点からは最悪であるパターン(VII)がよいトラヒック特性を持っていることがわかる。これは Pedersen の方法も正規化行列の階数と固有値を使う方法も同じ入線群間で複式をとることを禁止することに重点を置き、各入線群の複式度の高い出線の数と低い出線の数との比率を均等にした方が

表 6.5 Pseudoホモジーニャスなグレージングの検討例

パターン	出線の複式構成図					
	入線群 NO.	1	2	3	4	5
I	1	○	○	○	○	○
	2	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○
	4	○	○	○	○	○
	5	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○
II	1	○	○	○	○	○
	2	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○
	4	○	○	○	○	○
	5	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○
III	1	○	○	○	○	○
	2	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○
	4	○	○	○	○	○
	5	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○
IV	1	○	○	○	○	○
	2	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○
	4	○	○	○	○	○
	5	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○
V	1	○	○	○	○	○
	2	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○
	4	○	○	○	○	○
	5	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○
VI	1	○	○	○	○	○
	2	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○
	4	○	○	○	○	○
	5	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○
VII	1	○	○	○	○	○
	2	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○
	4	○	○	○	○	○
	5	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○

よいという直感的な評価を反映していないためと考えられる。そこで最優先する基準として「各入線群 i の複式度が高い方の出線数 M_i の最大値 $\max_i M_i$ が小さいほどよいパターン」と考える。表6.5 の例では、パターン(I)、(VII)ではどの入線群についても $M_i=2$ なので $\max_i M_i=2$ であり、パターン(VI)では入

線群2 がM の最大値4 をとるのでパターン (I) 、 (VII)の方がパターン(VI)よりも優れているとする。この基準と階数および固有値を組合せて評価すると、各入線群の最悪呼損による順位付けと一致する。しかし、この基準をとっても Pedersen の方法ではパターン (V) を正当に評価できない。

表 6.6 Pseudoホモジーニャスなグレージングの場合の
各評価尺度の計算結果とトラヒック特性

		I	II	III	IV	V	VI	VII	
各 評 価 尺 度 の 計 算 値	$Q = Q^*$	162	162	162	162	166	166	174	
	T^*	294	300	302	306	296	300	294	$\uparrow D^*$ ↓
	階数 *	5	4	4	3	5	5	3	
	$\Pi \rho_i^*$	1.125	3.438	2.500	8	0.375	0.375	8	
	$\min \rho_i^*$	0.5	0.691	0.415	2	0.139	0.191	2	
	T	1,050	1,050	1,050	1,050	1,050	1,050	1,050	$\uparrow D$ ↓
	階数	23	22	22	21	23	23	21	
	$\Pi \rho_i$	0.0184	0.268	0.195	2.867	0.0061	0.0061	2.907	
	$\min \rho_i$	0.119	0.163	0.094	0.460	0.034	0.043	0.4	
	順位(1)	1	4	5	6 or 7	3	2	6 or 7	

		I	II	III	IV	V	VI	VII
ト ラ ヒ ッ ク 特 性 値	A(eri)	5.67	5.70	5.70	5.69	5.69	5.68	5.68
	B	0.0068	0.0071	0.0074	0.0078	0.0068	0.0071	0.0072
	$\max B_i$	0.0073	0.0090	0.0103	0.0106	0.0085	0.0128	0.0078
	$\min B_i$	0.0056	0.0035	0.0035	0.0035	0.0043	0.0036	0.0063
	A(eri)	10.65	10.64	10.62	10.59	10.63	10.62	10.62
	B	0.0653	0.0691	0.0699	0.0724	0.0665	0.0686	0.0661
	$\max B_i$	0.0679	0.0886	0.0903	0.0937	0.0840	0.1145	0.0674
	$\min B_i$	0.0624	0.0366	0.0363	0.0345	0.0517	0.0468	0.0640
	順位(2)	1 or 2	4	5	6	3	7	1 or 2

A : 運ばれた呼量、B : 総呼びふくそう率、 B_i : 入線群 i の呼びふくそう率
 順位(1) : 配置の理論上の順位、順位(2) : トラヒック特性値から見た順位

6.5 む す び

以上の検討により、出線を不定位選択する入線群数、総出線数および 1 入線群を構成する入線数が等しいグレージング（1 段集線装置あるいは多段の通話路網の初段）では、

- (1) 各入線群 i の複式度が高い方の出線数 M_i の最大値 $M = \max_i M_i$ が小さいほどよいパターンである（ホモジーニャスなグレージングでは複式出線数は一定なので差は出ない）、
- (2) M が等しい場合には、正規化行列 C （または C^* ）—最良線形不偏推定量を得るのに用いられる正規方程式に現われる実対称半正值行列—の階数 R （または R^* ）が大きいほどよいパターンである、
- (3) R が等しい場合には、正規化行列 C （または C^* ）の固有値の最小値および積が大きいほどよいパターンである。【これは $(C$ の固有値の積) \times (C^* の固有値の積) が大きいほどよいパターンとしてもよい。】

という実験計画法の配置の理論（ブロック計画）を利用した評価尺度がグレージングの評価に有効であることを明らかにした。その結果、グレージングとブロック計画との対応付けが有効であることも証明した。全入線数は等しいが 1 入線群を構成する入線数が異なる場合には、複数入線で構成される入線群を同一複式パタンの繰返しとみなせば同様の取扱が可能である。しかし、入線群数が大きくなるとそれにつれて生起行列 N が大きくなるため計算機のメモリ量や計算時間に対する配慮が必要になってくる。

本評価法では行列の固有値を求めることができれば大半の計算は終わったといってよい。特に行列が対称行列であるためその導出は容易である。DEMOS-E のようにサブルーチンとして固有値算出プログラムがある場合にはプログラム上の苦労はほとんどないといってよい。

利用可能な BIBD が存在しないときに最適なものを求める手順については示さなかったが、グレージングが配置の問題（ブロック計画）として扱える以上、よい配置を求める方法がそのままよいグレージングを求める方法になり得ると考えている。

7.1 まえがき

空間分割形の加入者用交換機通話路網では、回線能率と加入者呼率との差を初段あるいは次段における集線で吸収している。空間分割形通話路網のコストは、ほぼ差点数に比例するため小さな格子スイッチを用いた多段の通話路網により差点数を減少させている。

しかし、小さな格子スイッチの場合には格子スイッチ間の負荷の不均衡が生じやすく、しかも多段の再整合を行う通話路網では内部ふくそう率が1次リンクの全閉塞率によって大きく影響されるため、初段の構成法が重要となる。そこで負荷の不均衡・集線比の影響の吸収、1次リンクの全閉塞率の減少効果を持つものとして第4章で均衡飛び複式結線形式(BSM: Balanced Skip Multiples)の構成法を提案した。BSMは原理的には図7.1に示すように特定の差点にのみ接点を配することにより構成できるが、初段に用いる差点格子スイッチが次段以降と異なることは部品の共用化という点で望ましくない。そこで本章では、通常用いられている $1 \times n$ の短冊形格子スイッチ(たとえばD10形交換機に採用された多接点封止—SMM—形スイッチ)と $n \times n$ の正方形格子スイッチのそれぞれ(n は素数のべき乗)に対して、格子スイッチ間の簡単な配線で図7.1と等価な通話路網を構成する方法を明らかにする。節7.2では $1 \times n$ 格子スイッチを用いる場合の配線アルゴリズムを示すと

ともに同一出レベルの隣り合う2出端子間を通る配線数および同一格子の隣り合う2出端子間を通る配線数について明らかにする。節7.3では正方形格子スイッチを用いる場合に、出線の並べ替えを行うための再配置部を実装単位にもたせることにより非常に簡

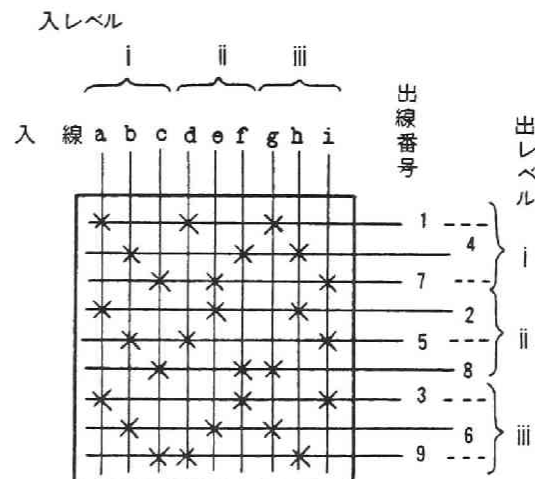


図 7.1 均衡飛び複式結線形式の差点配列
($v = 9$)

単な複式結線でBSMが構成できることを示す。

7.2 $1 \times n$ 格子スイッチによるBSM構成法^{[47]～[50], [52], [54]}

従来は $1 \times n$ 格子スイッチを用いる場合にも、まず図 7.2に示すように n 個の $1 \times n$ 格子スイッチの同一水平路に属する出端子同士をすべて複式接続して $n \times n$ 格子スイッチを作り、それを単位に多段の通話路網を構成していた。このような複式結線は、容易ではあるが $1 \times n$ という単位の持つ特長を生かしていない。そこで本節では $1 \times n$ 格子スイッチを用いるという前提のもとで均衡飛び複式結線形式（以下BSMと略す）の構成法を提案する。

例として、 1×3 格子スイッチを用いた場合の9個の格子スイッチ(a, b, c, ..., i)間の配線を図 7.3(a)に示す。図 7.3(a)は図 7.

3(b)の均衡不完備ブロック配置（以下、BIBDと呼ぶ）I, III, IVの各行を各格子スイッチがアクセスしうる出線番号と対応付ける対応付け[D]（節4.3 参照）を施すことにより得ら

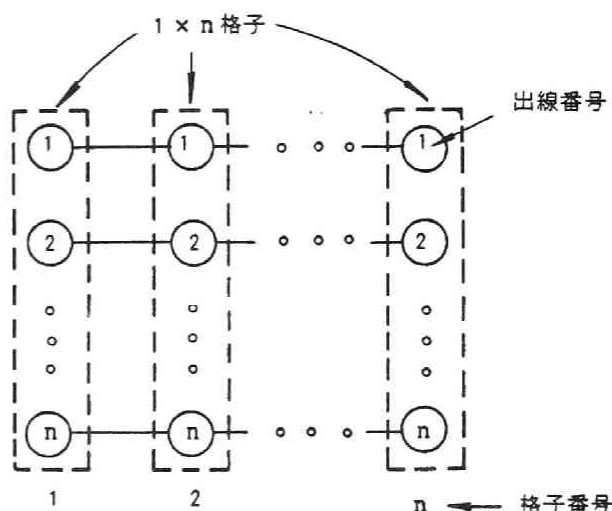
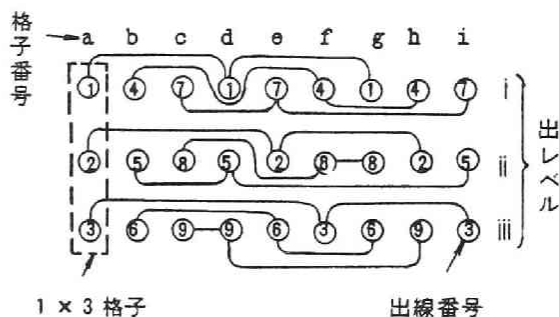


図 7.2 従来方式



(a) 複式結線形式

(a)	1 2 3	1 4 7	(d)	1 5 9	(g)	1 8 6
(b)	4 5 6	2 5 8	(e)	7 2 6	(h)	4 2 9
(c)	7 8 9	3 6 9	(f)	4 8 3	(i)	7 5 3
	I	II		III		IV

(b) BIBD

図 7.3 均衡飛び複式結線形式とそれを構成するのに用いられる BIBD ($n=3$)

れる狭義のBSMである。図 7.3 (a)と図 7.1とが等価なことは、図 7.1の入線a, b, c, …… , iがアクセスしうる出線番号と図 7.3の格子スイッチa, b, c, …… , iがアクセスしうる出線番号とが完全に一致することから確認できる。本節では図 7.3(a)に示すような交差のない配線が常に可能なことおよび出端子間の配線密度について述べる。

(1) 格子スイッチ間の交差のない配線アルゴリズム

図7.3(a)の出レベルiiiでは 9出端子（各格子スイッチから 1出端子ずつ）が複式結線されて、出線 3, 6, 9に結ばれている。出線 3, 6, 9の出端子が異なる直線上に乗っている場合には

図 7.4(A) のようになる。
出線 3と6 の出端子を同一直線上に乗せるためには、
図 7.4(B) に示めすように
出線 3, 6の出端子間を結ぶ線は基本的には図 7.4(A)
と同じ位置にあるものとし、
出線 3の出端子を出線 6の
出端子の乗っている直線上
まで降ろし、それに伴って
出線 3の出端子間を結ぶ線
には降下部分Iを、出線 6
の出端子を結ぶ線には降下
部分IIを持たせる。これに
出線 9を追加し、3 出線の
出端子を同一直線上に並べ
た場合も全く同様の操作を
行うことができ、図 7.4(C)
のように表現できる。この
操作は出線および出端子数

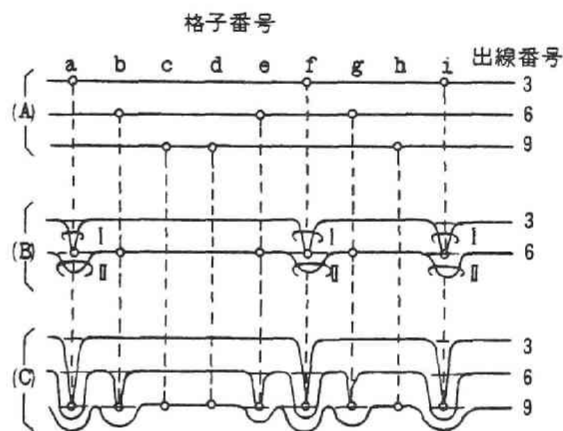


図 7.4 複式結線アルゴリズム

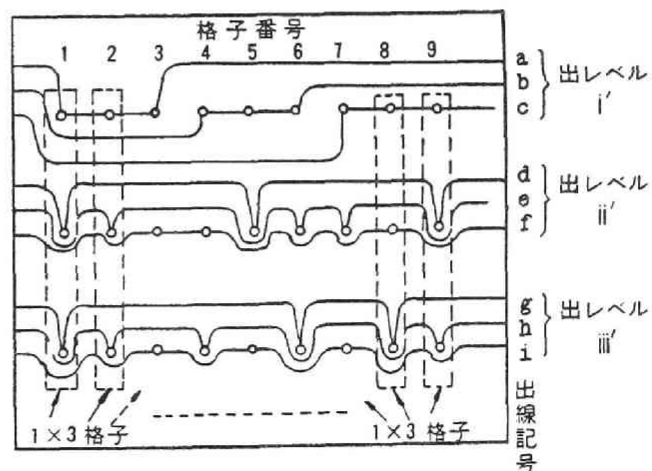


図 7.5 短冊形格子によるBSMの1構成単位

に依らず可能である。

図 7.3(b) の BIBD と図 7.

3(a)のBSMとは、

ブロック：各入線群（格子スイッチ：本節では1入線から成る格子スイッチ）がアクセスし得る出線番号の集合

なる対応付け〔D〕を行なったものであり、各出線にアクセスしうる格子スイッチ番号の集合は直ちにはわからない。しかし、

ブロック：各出線にアクセスしうる入線群（格子スイッチ）番号の集合

なる対応付け〔D*〕（節4.3 参照）によれば同一出線にアクセスしうる格子スイッチ番号の集合（ブロック）が直ちにわかるので複式結線が容易になる。また、対応付け〔D〕によって作られるBSMと対応付け〔D*〕によって作られるBSMとは、

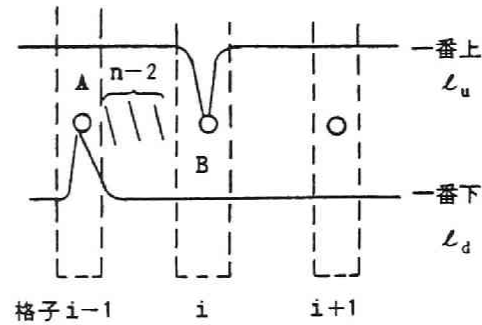
$$\text{入線群数} = \text{出線数} = p^{2m} \quad (p : \text{素数}, m : \text{正整数}),$$

$$\text{利用度 } n = p^m$$

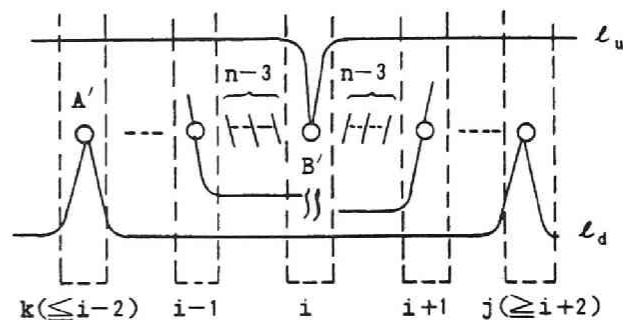
の狭義のBSMのときには等価である。対応付け〔D*〕により交差のない配線を施した場合で集線比が $k:1$ のときには図 7.5のBSMを k 個使い、同一水平路に属する出端子同士をすべて複式接続すればよい。

(2) 同一レベルの隣り合う2端子間を通る配線数

図 7.3(a) または図 7.5に示された配線は、一番上にある出線 (l_u と呼ぶ) と一番下にある出線 (l_d と呼ぶ) との間隙を残りの出線 (図 7.5では a と c



(a) 望ましくない例



(b) 望ましい例

図 7.6 同一出レベルの隣接2出端子間の配線例

の間を b が、 d と f の間を e が、 g と i の間を h) が縫っていく方法といえる。
 1 出レベルに属する出線数 n が大きくなると、同一出レベルの ℓ_u と ℓ_d との間隙を $(n-2)$ 本の出線が縫っていくことになる。このため、図 7.6(a) に示すように ℓ_d 上の出端子 A と ℓ_u 上の出端子 B とが隣り合っていれば、その隣り合う 2 出端子 A と B の間を $(n-2)$ 本の出線が通ることになる。図 7.6(b) に示すように、 ℓ_u 上の出端子と ℓ_d 上の出端子とが決して隣り合わなければ任意の隣り合う 2 格子スイッチの同一出レベルの出端子の間隙を通る出線 (配線) 数は $(n-3)$ 以下にできる。本節ではこのような配線法の存在について調べる。まず、BSM の構成に際し利用する『完全直交ラテン方格系から BIBD を構成する方法』を説明し、次いで $n=2^m$ の場合とその他の場合に分けて同一出レベルでの配線密度を検討する。

(i) BIBD の作り方^[32]

ブロック数 $b = n^2 + n$ (たとえば図 7.3(b) の行数)、要素数 $v = n^2$ (図 7.3(b) では要素 $1, 2, \dots, 9$)、ブロックの大きさ (含まれる要素の数) $k = n$ (図 7.3(b) では行内の要素数 3)、各要素の現われるブロック数 $r = n + 1$ 、任意の 2 要素の会合数 (同じブロックに現われる回数) $\lambda = 1$ なる BIBD は $(n-1)$ 個のラテン方格 L_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$)

$$L_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & w^{n-2} \\ w^i & 1+w^i & \dots & w^{n-2+w^i} \\ w^{i+1} & 1+w^{i+1} & \dots & w^{n-2+w^{i+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w^{i+n-2} & 1+w^{i+n-2} & \dots & w^{n-2+w^{i+n-2}} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

を用いて次の手順(a),(b),(c)により作ることができる。

- (a) $(i \ n + j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ を要素とするブロックを n 個 ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 作る。
- (b) $(i \ n + j)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ を要素とするブロックを n 個 ($j = 1, 2, \dots, n$) 作る。
- (c) L_i の元 j の位置番号を要素とするブロックを n 個 ($j = 0, 1, w, w^2, \dots$) 作る。

$\dots, w^{n-2})$ 作る。ブロック内の順序は本来どうでもよいが、ここでは一定の規則性を持たせるために L_i の列番号順にブロック内の順序を付ける。 $(i=1, 2, \dots, n-1)$ 。

手順(a),(b),(c) により作られる n 個ずつのブロックで $n \times n$ の正方行列を作り、手順(a) で得られる行列を A_1 、すなわち

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ n(n-1)+1 & n(n-1)+2 & \dots & n^2 \end{bmatrix}$$

とし、手順(b) から作られる行列 (A_1 の転置行列) を A_2 とし、手順(c) の L_i から作られる行列を B_i とする。

このようにして得られた A_1, B_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) の各行に対応付け $[D^*]$ を施すと狭義の BSM が得られる。 A_1 に対応する出レベルについては図7.5 の出レベル i' から明らかなように隣り合う格子スイッチ間を通る配線数は常に 0 となるので、以下では B_i に対応する出レベルについてだけ論じる。

(ii) $n=2^m$ の場合の配線数

B_i の l_u (一番上にくる配線) に対応する行 b_1 の要素は L_i の元 j (L_i の要素と B_i の要素とを区別するために L の要素を元と呼ぶ) の位置番号、 l_d (一番下にくる配線) に対応する行 b_2 の要素は L_i の元 h の位置番号になっているものとする。このとき

「 L_i 内で元 j と h が隣り合うことがある」

→ 「 B_i の行 b_1 と b_2 に隣り合う数字がある」

ことになり、逆に L_i 内で元 j と h が隣り合うことがなければ、 B_i に対応付け $[D^*]$ を施して得られる BSM の出レベルについて l_u 上の格子スイッチと l_d 上の格子スイッチが隣り合わない。

$n=2^m$ のときにはすべての L_i に対して決して隣り合わない同一の要素

(元) 対を見出すことができ、次の定理が得られる。

〔定理 7.1〕 n^2 個の $1 \times n$ 格子スイッチを用いて狭義の BSM を作るとき、 $n = 2^m$ ($m \geq 2$) であれば、任意の 2 格子スイッチの同一レベルにある隣り合う 2 出端子間を通る配線数は最大 ($n-3$) にできる。

(証明) w を有限体 $GF(2^m)$ の原始根とし、 h は

$$1 + w = w^h, \quad n-2 \geq h \geq 2 \quad (7.2)$$

を満たす整数とする。 $n = 2^m$ (m : 正整数)、 $f(w)$ を有限体 $GF(2)$ の元を係数とする m 次の既約多項式とすると、 w に関する式に現れる等号は、 $\text{mod. } 2$ かつ $\text{mod. } f(w)$ で考えたものである。このとき、ラテン方格

$$L_{n-1} = L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & w & \cdots & w^{n-2} \\ 1 & 0 & 1+w & \cdots & 1+w^{n-2} \\ w & 1+w & 0 & \cdots & w+w^{n-2} \\ w^2 & 1+w^2 & w+w^2 & \cdots & w^2+w^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{n-2} & 1+w^{n-2} & w+w^{n-2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

において、 0 と隣り合う元は 1 と $w^j(1+w)$, $j=0,1,2,\dots,n-3$ である。 L_{n-1} の元は $0,1,w,\dots,w^{n-2}$ だけなので

$$1 + w = w^h \neq 1$$

なる h が存在する。ここで、 $w^{n-1}=1$ に注意すれば、 0 と隣り合う元 1 と $w^j(1+w)$, $j=0,1,2,\dots,n-3$ は

$$w^h, w^{h+1}, w^{h+2}, \dots, w^{n-2}, 1, w, \dots, w^{h-2}$$

だけであることがわかる。従って、元 w^{h-1} だけが要素 0 に隣り合わないことがわかる。

L_i の元 0 の位置番号 (B_i の第 1 行の要素) を同一出レベルにおける一番上の配線 l_u によって結ばれる格子スイッチの番号とし、 L_i

の元 w_i^{h-1} の位置番号 [B の第 $(h+1)$ 行の要素] を同一出レベルにおける一番下の配線 ℓ_d によって結ばれる格子スイッチの番号とすれば、 ℓ_u 上の格子スイッチと ℓ_d 上の格子スイッチとは隣り合わない。

元 0 に隣り合わない元は 1 個しかないため隣り合う 2 格子スイッチの間隙を通る配線数の最大値は $(n-3)$ よりも小さくすることができない。

以上は、 L_{n-1} を例にとり証明したが、 L_{i+1} が L_i の第 2 行以降を巡回させたものであることを考慮すると任意の L_i ($i=1,2,\dots,n-1$) に対して元 w^{h-1} は元 0 に隣り合っていないことがわかる。(証明終り)

$m=2,3,\dots,6$ の場合の既約多項式と式 (7.2) を満たす h とを表 7.1 に示す。

表 7.1 有限体 $GF(2)$ の既約多項式と $1+w=w^h$ をみたす h

m	既約多項式	h
2	w^2+w+1	2
3	w^3+w^2+1	5
	w^3+w+1	3
4	w^4+w^3+1	12
	w^4+w+1	4
5	w^5+w^3+1	14
	\vdots	
6	w^6+w+1	6
	\vdots	

(iii) $n = p^m$ ($p: 2$ 以外の素数) の場合の配線数

$n = p^m$ ($p: 2$ 以外の素数、 $m: 正整数$) の場合には、決して隣り合わないような要素 (元) 対が存在しない。すなわち、この場合、同一レベルの隣り合う 2 出端子間を通る配線数の最大値は $(n-2)$ より減らせない。以下、元 0 とそれ以外の元に分けてこれを証明する。

〔証明 7.1〕 元 0 に決して隣り合うことのない元はないことの証明

$n = p^m$ の場合にも、 $n = 2^m$ の場合と同じく L_0 において隣り合わない元の存在を調べる。 $n = p^m$ ($p: 2$ 以外の素数) の場合には L_0 は

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & w & \cdots & w^{n-2} \\ 1 & 2 & 1+w & \cdots & 1+w^{n-2} \\ w & 1+w & 2w & \cdots & w+w^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ w^{n-2} & 1+w^{n-2} & w+w^{n-2} & \cdots & 2w^{n-2} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

となり、 $n = 2^m$ の場合と異なり、第1行を除き、対角線上に元 0はない。
そこでまず元 0の位置を求める。

第2行の第3列以降(第1, 2列は 0でない)の元は $(1+w^i)$ の形をしているので

$$1 + w^i = 0 \quad (7.5)$$

をみたす i をみつければよい。ところで有限体 $GF(p^m)$ の元は $0, 1, w, w^2, \dots, w^{n-2}$ で尽くされ、等号を mod. p かつ mod. $f(w)$ [$f(w)$ は $GF(p)$ 上の m 次既約多項式] のもとで考えると、すべての元は $(m-1)$ 次以下の n 個の相異なる多項式で表すことができる。そこで、 w^i ($i \geq 0$) には元 $1, 2, 3, \dots, p-1$ (以下、整数元と呼ぶ) に等しい元が存在する。式(7.5)は、

$$w^i = p-1 \quad (7.6)$$

に変形することができ、 L_0 の第1行で式(7.6)をみたす元 w^i がある列の元が第2行では0になる。ここで整数元のべき乗は整数元であるので第1行には、 $(p-1)$ 個の1でない整数元が等間隔に並んでいる必要がある。すなわち第1行の最初の1でない整数元を w^a とすれば、 w^{ka} ($k=2, 3, \dots, p-2$) も1でない整数元であり、 a 個ごとに整数元が現れることになる。更に $(p-1)$ 個目の整数元は1であり、

$$1 = w^{n-1} \quad (7.7)$$

であることを考慮すると

$$w^{(p-1)a} = w^{n-1} \quad (7.8)$$

すなわち

$$a = (n-1)/(p-1) = (p^m-1)/(p-1) = \sum_{k=0}^{m-1} p^k \quad (7.9)$$

であることがわかる。たとえば、 $p^m = 5^2$ のときには、

$$a = \sum_{k=0}^1 5^k = 6 \quad (7.10)$$

より、 w^6, w^{12}, w^{18} ($w^{24}=1$) が整数元となる。したがって、式(7.6)をみたす i (以下、 N と呼ぶ) は、 a 個目の整数元のどれかに一致する。これが

$$N = (n-1) / 2 \quad (7.11)$$

であることは次のようにして容易にわかる。

$$w^{(n-1)/2} = K \quad \text{とすると}$$

$$K^2 = w^{n-1} = 1 \pmod{p},$$

等号を mod. p で考えないときには、

$$K^2 - \varrho p = 1 \quad (\varrho < p),$$

$$(K-1)(K+1) = \varrho p$$

であって、pはK以上の素数なので

$$K+1 = p$$

すなわち

$$K = p-1$$

でなければならない。

第1行の $w^{(n-1)/2}$ 以降の元は順に

$$(p-1), (p-1)w, (p-1)w^2, \dots, (p-1)w^{(n-3)/2}$$

で表され、それぞれに順に

$$1, w, w^2, \dots, w^{(n-3)/2}$$

を加えると0になることから、式(7.4)は

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0, & 1, & w, & \dots, & p-1, & (p-1)w, & \dots \\ 1, & 2, & 1+w, & \dots, & 0, & 1+(p-1)w, & \dots \\ w, & 1+w, & 2w, & \dots, & w+p-1, & 0, & w\{1+(p-1)w\}, \dots \\ w^{(n-3)/2}, & \dots, & w^{(n-5)/2}(w+p-1), & 0, & \dots \\ p-1, & 0, & w+p-1, & \dots, & \dots \\ (p-1)w, & 1+(p-1)w, & 0, & w(w+p-1), & \dots \\ \dots, & w^{(n-5)/2}\{1+(p-1)w\}, & 0, & w^{(n-3)/2}(w+p-1), & \dots \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

となる。すなわち元0に隣り合う元は1と

$$w^i \{1+(p-1)w\} ; i=0,1, \dots, (n-5)/2, (n-3)/2 \quad (7.13)$$

$$w^j (w+p-1) ; j=0,1, \dots, (n-5)/2, (n-3)/2 \quad (7.14)$$

$$[\text{但し、 } w^{(n-3)/2} \{1+(p-1)w\} = w^{(n-3)/2+1}]$$

である。また

$$w^{(n-1)/2} \{1+(p-1)w\} = (p-1) \{1+(p-1)w\} = p-1+w = w^0 (w+p-1) \quad (7.15)$$

であるので式(7.13)における $i=(n-1)/2$ が式(7.14)における $j=0$ の場合と一致していることになり、

$$1+(p-1)w = w^k \quad (7.16)$$

とすると、0に隣り合う元は

$$w^k, w^{k+1}, \dots, w^{k+(n-3)/2}, w^{k+(n-1)/2}, \dots, w^{k+n-2},$$

で表される $(n-1)$ 個の相異なる元であるが、0と異なる元の数 $(n-1)$ 個なので、0と隣り合わないような元は存在しない。

[証明 7.2] 元 w^h ($h=0,1,2, \dots, n-2$) に決して隣り合うことのない元は存在しないことの証明

ここでは元0を含めて全ての元を平等に取り扱うため

$$\begin{aligned} X(-1) &= 0, \\ X(i) &= w^i \quad (i=0,1,2, \dots, n-2) \end{aligned} \quad (7.17)$$

なる関数 $X(\cdot)$ を導入する。この関数に関しては、

$$\begin{aligned} w X(i) &= X(i+1), \quad i \geq 0 \\ w X(-1) &= X(-1) \end{aligned} \quad (7.18)$$

なる関係が成り立つ。

第 i 行、第 j 列の元は

$$X(i-2)+X(j-2)$$

で表される。第 i 行で着目している h に関し

$$X(i-2)+X(j-2) = X(h) (= w^h) \quad (7.19)$$

を満たす j を r_i ($1 \leq r_i \leq n$) とする。第 i 行で w^h の左側に隣り合う元は

$$X(i-2)+X(r_i-3) \quad (7.20)$$

である。ただし、 $r_i = 1$ の場合には左側に隣り合う元はないので、式(7.20)は $2 \leq r_i \leq n$ に対して適用される。第 i 行で w^h の右側に隣り合う元は

$$X(i-2)+X(r_i-1) \quad (7.21)$$

である。ただし、 $r_i = n$ の場合には右側に隣り合う元はないので、式(7.21)は $1 \leq r_i \leq n-1$ に対して適用される。

(a) 第 i 行と第 k 行 ($i \neq k$) で w^h の左側に隣り合う元が等しいと仮定する。式(7.20)より

$$X(i-2)+X(r_i-3)=X(k-2)+X(r_k-3) \quad (7.22)$$

である。ただし、式(7.19)より

$$X(i-2)+X(r_i-2)=X(k-2)+X(r_k-2) = X(h) \quad (7.23)$$

である。 $i, k \geq 2$ かつ $r_i, r_k \geq 3$ の場合には、式(7.22)の両辺に w を乗じると式(7.18)の第1式の関係より

$$X(i-1)+X(r_i-2)=X(k-1)+X(r_k-2) \quad (7.24)$$

となる。式(7.23)、式(7.24)より

$$X(i-1)-X(i-2)=X(k-1)-X(k-2) \quad (7.25)$$

$$w^{i-2}\{X(1)-X(0)\}=w^{k-2}\{X(1)-X(0)\} \quad (7.26)$$

となるが、 $X(1) \neq X(0)$ かつ $i \neq k$ なので上式は矛盾する。すなわち、 $i, k \geq 2$ かつ $r_i, r_k \geq 3$ の条件下では、 w^h の左側に隣り合う元は行が異なれば異なる。このようにして得られる $(n-3)$ 個 [$h=0$ に対しては、除外条件が重複しているため $(n-2)$ 個] の相異なる元をタイプAと呼ぶ。

(b) 第 i 行と第 k 行で w^h の右側に隣り合う元については $i, k \geq 2$ かつ $r_i, r_k \geq 2$ ならば必ず異なることは(a)と同様にして証明できる。このようにして得られる $(n-3)$ 個 [$h=n-2$ に対しては $(n-2)$ 個] の相異なる元をタイプBと呼ぶ。

(c) 第1行で w^h [$=X(h)$] に隣り合う元は

$h=0$ ならば 0 と w 、

$1 \leq h \leq n-3$ ならば w^{h-1} [$=X(h-1)$] と w^{h+1} [$=X(h+1)$]

$h=n-2$ ならば w^{n-3}

だけである。 $h \geq 1$ の場合に w^{h-1} がタイプ A に含まれると仮定すると

$$X(h-1)=X(i-2)+X(r_i-3) \quad (7.27)$$

となる。両辺に w を乗じると、 $r_i \geq 3$ に対して

$$X(h)=X(i-1)+X(r_i-2) \quad (7.28)$$

となる。これに式(7.23)を代入すると

$$X(i-2)=X(i-1)$$

となり、これは式(7.18)に矛盾する。従って、 $1 \leq h \leq n-2$ の場合には w^{h-1} とタイプ A の元とは異なる。同様に $0 \leq h \leq n-3$ に対しては w^{h+1} とタイプ B の元とは異なる。タイプ A の元と元 w^{h-1} とをまとめてタイプ A'、タイプ B の元と元 w^{h+1} とをまとめてタイプ B' と呼ぶ。なお、 $h=0, n-2$ の場合にはタイプ A, B ですでに相異なる $(n-2)$ 個の元が得られており、タイプ A = タイプ A'、タイプ B = タイプ B' である。

$1 \leq h \leq n-3$ の場合にタイプ A' の元とタイプ B' の元とが完全に一致しているとする、タイプ A' の元の和 S_1 とタイプ B' の元の和 S_2 とは等しい筈である。ここでタイプ A' では 2 つの行、すなわち

(d) 第 1 列目の元 w^h の左側には隣り合えないことから

$$X(i_1-2)+X(-1)=X(h) \quad (7.29)$$

を満たす i_1 (実は $i_1=h+2$)、

(e) $r_i \geq 3$ としたために $r_i=2$ 、すなわち、 w^h が第 2 列にある行で

$$X(i_2-2)+X(0)=X(h) \quad (7.30)$$

を満たす $i_2 (\equiv \alpha)$

が除外されているため、 S_1 は $r_1=h+2$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i \neq 1, \alpha, h+2} \{X(i-2)+X(r_i-3)\} + w^{h-1} \\ &= \sum_{i \neq \alpha, h+2} \{X(i-2)+X(r_i-3)\} \end{aligned} \quad (7.31)$$

である。タイプ B' では

(f) 第 n 列目の元 w^h の右側には隣り合えないことから

$$X(j_1-2)+X(n-2)=X(h) \quad (7.32)$$

を満たす $j_1 (\equiv \beta)$ 、

(g) $r_i \geq 2$ としたために $r_i = 1$ すなわち、 w^h が第1列にある行、即ち

$$X(j_2-2)+X(-1)=X(h) \quad (7.33)$$

を満たす j_2 (実は $j_2 = h+2$)

の2つの行は除外され、 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i \neq 1, \beta, h+2} \{X(i-2)+X(r_i-1)\} w^{h+1} \\ &= \sum_{i \neq \beta, h+2} \{X(i-2)+X(r_i-1)\} \end{aligned} \quad (7.34)$$

である。 w^h はラテン方格の特性から必ず各行、各列に1回ずつ含まれるので、その左側または右側にある要素が行または列に2個以上含まれることはない。そこで、 S_1, S_2 における和で除外されている位置を示すとそれぞれ表7.2の*、**の位置になる。すなわち全ての元のうち式(7.31)の第2式の第1項では $w^{\alpha-2}$ と w^h 、第2項では 0 と w^{n-2} 、式(7.34)の

表 7.2 和 S_1, S_2 から除外される位置*, **

$X(r_i-2) \backslash X(i-2)$	0	1	w^{n-2}
\vdots	\vdots	\vdots	\diagdown	\vdots
$w^{\alpha-2}$	*	w^h
\vdots	\vdots	\vdots	\diagdown	\vdots
$w^{\beta-2}$	**		w^h
\vdots	\vdots	\vdots	\diagdown	\vdots
w^h	w^h	**	*
\vdots	\vdots	\vdots	\diagdown	\vdots

第2式の第1項では $w^{\beta-2}$ と w^h 、第2項では0と1を含まないため S_1 と S_2 とが等しいとすると

$$w^{\alpha-2} + w^h + w^{n-2} = w^{\beta-2} + w^h + 1 \quad (7.35)$$

でなければならない。ここで式(7.30)、式(7.32)から

$$X(\beta-2)+X(n-2)=X(\alpha-2)+X(0)=X(h) \quad (7.36)$$

すなわち

$$w^{\beta-2} + w^{n-2} = w^{\alpha-2} + 1 \quad (7.37)$$

である。式(7.35)、式(7.37)から、

$$w^{n-2} = 1$$

となり、これは不合理である。したがって、タイプA'とB'には少なくとも1個の共通しない元がある。その元を加えると結局、 w^h に隣り合わない相異なる(n-1)個の元が得られる。したがって、 w^h に隣り合わない元は存在しない。

$h=0$ 、または $(n-2)$ の時には $\alpha=1$ または $\beta=1$ として考えると、やはり(n-1)個の相異なる元が得られる。

以上より、元 w^h に隣り合わない元はないことが証明できた。

〔証明 7.1〕、〔証明 7.2〕より次の定理が得られる。

〔定理 7.2〕 $n=p^m$ ($p \neq 2$) であることを除いて〔定理 7.1〕と同様のBSMを構成するとき、任意の2格子の同一出レベルにある隣り合う2出端子間を通る配線数の最大値は(n-2)よりも小さくできない。

(3) 同一格子の隣り合う2出端子間を通る配線数

同一格子の隣り合う2出端子間を通る配線数については、次の〔定理 7.3〕および〔系 7.1〕が成り立つ。

〔定理 7.3〕 利用度 $n=p^m$ (p : 素数、 m : 正整数)、格子数=出線数= n^2 なるBSMで、同一格子の隣り合う2出端子間(2出レベル間)を通る配線数が κ であるような格子数Nは

$$0 \leq \kappa \leq n-1 \quad \text{のとき} \quad N = \kappa + 1、$$

$$n \leq \kappa \leq 2n-2 \quad \text{のとき} \quad N = 2n-1-\kappa$$

である。

[系 7.1] (定理 7.1) の証明に用いた BSM では、同一格子の隣り合う 2 出端子間 (出レベル i と $i+1$ の間) を通る配線数の最大値は $(2n-2)$ であり、その最大値をとる格子番号は B_i の第 1 行と B_{i+1} の第 $(h+1)$ 行に共通な要素で与えられる。ただし、 h は式 (7.2) で定義された値である。

(証明) 節 7.2, (2), (i) で示した n 個ずつのブロックの集合 $A_1 (= B_0), B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ に対して対応付け $[D^*]$ を施し、さらに $n=2^m$ (m : 2 以上の正整数) ならば (定理 7.1) の証明に示した操作によって、各出レベルについて \mathcal{L}_u (一番上の配線) から \mathcal{L}_d (一番下の配線) までの配線順に B_i の行を入れかえて得られる行列を D_i ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$) とする。

D_i の任意の行 j の要素を $d_{j1}^{(i)}, d_{j2}^{(i)}, \dots, d_{jn}^{(i)}$ とする。節 7.2, (2), (i) で示した L_i から作られる BIBD では会合数 $\lambda=1$ であるので要素 $d_{jk}^{(i)}$, $k=1, 2, \dots, n$ の任意の対は他のブロックでは出現することではなく、 D_{i+1} は各行に D_i の第 j 行の要素を 1 個ずつ含む。

BSM を作る時にブロック内の要素の順序は関係ないので、 D_i, D_{i+1} 行内で要素の順序を入れかえることができる。

そこで、配線数を計数する便宜上、 D_i の第 j 行の要素を D_{i+1} では第 j 列に並べかえ、この行内の要素の並べかえによって得られる行列を E_{i+1} とする。

D_i では各行の要素の並ぶ順序を E_{i+1} での列に並ぶ順序に並べかえ、得られる行列を E_i とする。

この操作の結果、 E_i の転置行列 E_i' は E_{i+1} となる。即ち、 E_i の第 a 行第 b 列要素を $e_{ab}^{(i)}$ とすると

$$e_{ba}^{(i+1)} = e_{ab}^{(i)} \quad (7.38)$$

となる。

E_i, E_{i+1} の行順は \mathcal{L}_u から \mathcal{L}_d までの配線順になっているので、格子 j の場合の 2 出端子間を通る配線数は E_i の元 j と E_{i+1} の元 j との間にある行数に一致する。

式(7.38)より E_i の格子 $e_{ab}^{(i)}$ と E_{i+1} の格子 $e_{ab}^{(i)}$ すなわち $e_{ba}^{(i+1)}$ の間にある行数は

$$\kappa = (n-a)+(b-1) = (n-1)-(a-b) \quad (7.39)$$

で与えられる。

κ は $(a-b)$ の大きさで決まり、 $(a-b)$ の大きさは主対角線から平行にずれている大きさにより決まる。 $(a-b)$ の大きさが同じになる個数は主対角線から平行に $(a-b)$ ずれている線上の要素数に一致する。その個数は主対角線からずれるにつれて1個ずつ減るので、

$$|a-b| = c \quad (7.40)$$

となる個数は

$$N = n - c \quad (7.41)$$

で与えられる。

式(7.39)～式(7.41)より

$0 \leq a-b \leq n-1$ 、すなわち、 $0 \leq \kappa \leq n-1$ では

$$\begin{aligned} N &= n-(a-b) \\ &= \kappa + 1, \end{aligned} \quad (7.42)$$

$-(n-1) \leq a-b \leq 0$ 、すなわち、 $n \leq \kappa \leq 2n-2$ では

$$\begin{aligned} N &= n-(b-a) \\ &= 2n-1-\kappa \end{aligned} \quad (7.43)$$

となる。(定理 7.3 証明終り)

N の最大値 ($2n-2$) は、 E_i の第1行と E_{i+1} の第 n 行に共通な要素で表わされる格子のとき生じるが、 $n = 2^m$ の場合には E_i の第1行の要素は B_i の第1行の要素と一致し、 E_{i+1} の第 n 行の要素は B_{i+1} の第 $(h+1)$ 行の要素と一致するので系 [7.1] が得られる。

[例 7.1] $n=4$ の場合について [系 7.1] の成立を示す。定理 7.1の証明に用いた方法で $\{L_i\}$ から $\{B_i\}$ を作ると次のようになる。

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 0 & 1 \\ w^2 & w & 1 & 0 \\ 1 & 0 & w^2 & w \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 7 & 12 \\ 13 & 2 & 11 & 8 \\ 5 & 10 & 3 & 16 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

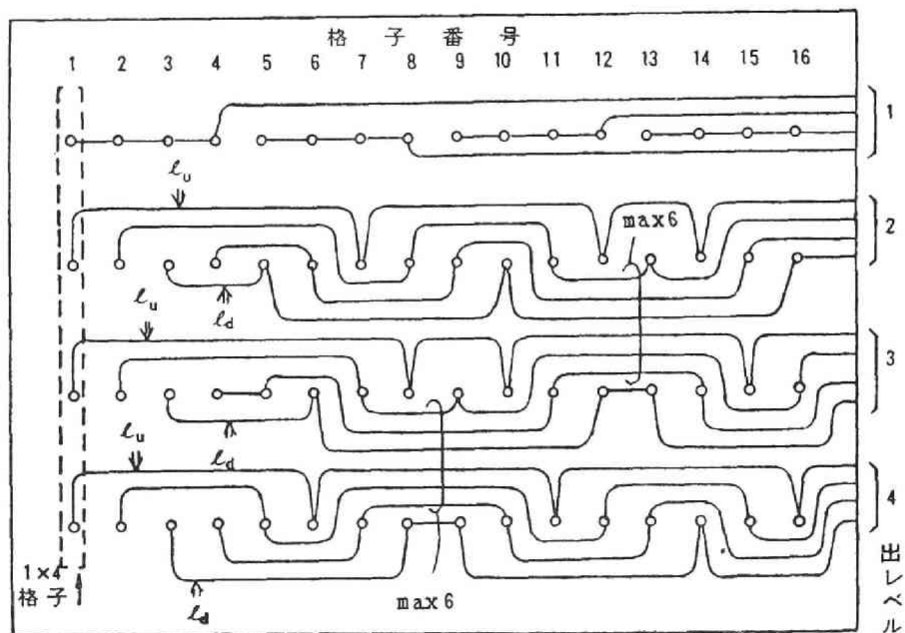


図 7.7 1×4 格子によるBSM構成例

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & w & w^2 \\ w^2 & w & 1 & 0 \\ 1 & 0 & w^2 & w \\ w & w^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 15 & 8 \\ 9 & 2 & 7 & 16 \\ 13 & 6 & 3 & 12 \\ 5 & 14 & 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} e \\ f \\ g \\ h \end{matrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & w & w^2 \\ 1 & 0 & w^2 & w \\ w & w^2 & 0 & 1 \\ w^2 & w & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 5 & 2 & 15 & 12 \\ 9 & 14 & 3 & 8 \\ 13 & 10 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ l \end{matrix}$$

ここで、式(7.2)は $1+w=w^2$ となり、 $h=2$ である。また、 B_i の各行に付けた (a, b ..., l) は節 7.3 で用いるためのものである。さらに、 $\{B_1\}$ の第1行が L_u 上の格子番号、第3行が L_d 上の格子番号を表わす。 B_1 の第1行と B_2 の第3行とに共通な要素は 12、 B_2 の第1行と B_3 の第3行とに共通な要素は 8である。したがって、出レベ

ル1と2の間では格子 12 の2出端子間の配線数が最大値 6、出レベル
2と3の間では格子 8の2出端子間の配線数が最大値 6となる。(図 7.
7 参照)

[例 7.2] $n = 8$ の場合には既約多項式 $f(w)$ を

$$f(w) = w^3 + w^2 + 1$$

とすると $1 + w = w^5$

すなわち $h = 5$ であり、 B_i の第 1行を Q_u 上の格子番号、第 6行を Q_d
上の格子番号とすればよい。

7.3 正方形格子によるBSMの構成法^{[47]～[51], [53]}

$n \times n$ ($n = p^m$ 、 p :素
数、 m =正整数)の正方形格
子(スイッチ)で狭義のBS
Mを構成する([構成法4.1]
参照)と、格子(入線群)数
が n^2 であるため単位となる
入線数が n^3 となり、これでは
大きすぎる。よってここでは
[構成法4.1]で示した広義
のBSMに対する配線法につ
いて述べる。

n 個の $n \times n$ スイッチで1
グリッド(1実装単位)を構
成し、グリッド内のスイッチ
間では複式をとらず、集線比
が $k:1$ (複式度 k)の場合
には k グリッドで所定の段を
構成し、各グリッド間で複式
をとるものとする。節7.2,(2),
(i)で得られた A_1 、 B_1 (例

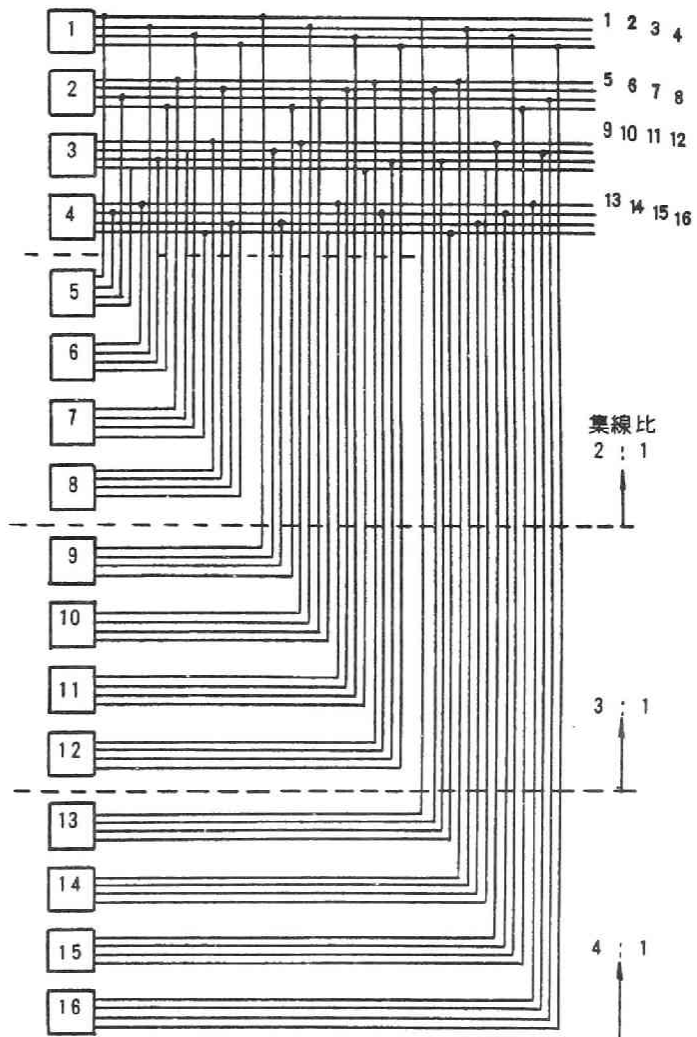


図 7.8 4×4格子による複式結線イメージ

7.1 参照)の各行を各スイッチがアクセスしうる出線番号と対応付ける(対応付け[D])と、単純に考えれば図 7.8のように複式結線すればよいが、その場合には集線比に応じて1出線ずつ複式すべき相手出線を特定化するのは工程上、非常に不利であり、何らかの方法でパタン化することが望ましい。そこで先ず B_i の間にはどんな関係があるのかを調べる。

(1) B_i と B_{i+1} との要素間の関係

式(7.1)で示される L_i の $0, 1$ を除く元 w^j を $j+1$ ($j=1, 2, \dots, n-2$)でおきかえると要素が $0, 1, \dots, n-1$ であるラテン方格 L'_i が得られる。以下では L'_i を用いて議論するが、 w^j と $j+1$ の対応付けに注意すれば L_i についても全く同様の議論が可能である。

B_i の第 a 行には L'_i の要素 $(a-1)$ の位置番号が乗っており、 B_{i+1} の第 b 行には L'_{i+1} の要素 $(b-1)$ の位置番号が乗っている。

L'_i と L'_{i+1} の位置番号 $1, 2, \dots, n$ (第1行)に乗っている要素は等しいので、 B_i と B_{i+1} では要素 $1, 2, \dots, n$ のある位置が同じである。

L'_i の第2行にあった要素は L'_{i+1} では最終行にあるため、 L'_i の第2行の要素 c が位置番号 r ($n+1 \leq r \leq 2n$) にあったとすると、その要素は L'_{i+1} では位置番号 $\{(n-1)n + (r-n)\}$ にあることになる。すなわち、 B_i 上で要素 r のある位置 [第 $(c+1)$ 行上] には B_{i+1} 上では要素 $\{(n-1)n + (r-n)\}$ がある。

L'_i の第3行以降は L'_{i+1} では1行ずつ繰り上がるので、 L'_i の第3行以降で位置番号 r' にあった要素 c' は L'_{i+1} では位置番号 $(r' - n)$ にあることになり、 B_i 上で要素 r' のある位置 [第 $(c'+1)$ 行上] には B_{i+1} 上では要素 $(r' - n)$ がある。

これらをまとめると次のようになる。

- 要素 $1, 2, \dots, n$ は B_i と B_{i+1} で同じ位置にある。
- B_i の要素 r ($n+1 \leq r \leq 2n$) と B_{i+1} の要素 $\{(n-2)n + r\}$ は同じ位置にある。
- B_i の要素 r' ($2n \leq r' \leq n^2$) と B_{i+1} の要素 $(r' - n)$ は同じ位置にある。

(2) B_i と B_{i+1} の間の複式結線

$n=4$ の場合を例にとって説明する。 B_1 、 B_2 、 B_3 の各行は順に格子 a 、 b, c, \dots, k, l がアクセスしうる出線番号を示すものとする（対応付け [D]）。 B_i と B_{i+1} で同じ出線番号にアクセスしているとき、それらの出線間で複式結線がとられることを意味する。ここで B_1 の要素を 1, 2, ..., 16 の順に並べ、その要素の位置にある B_2 、 B_3 の要素を示すと図 7.9 のようになる。同じ要素間で複式結線をとるので、 B_1 、 B_2 間の複式（パターン X）と、 B_2 、 B_3 間の複式（パターン Y）とは同じパターンであることがわかる。

$\{B_i\}$ の端子の位置を識別する符号として新たに位置番号を B_1 の出線番号そのもので定義する。図 7.9 は

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 7 & 12 & 13 & 2 & 11 & 8 & 5 & 10 & 3 & 16 & 9 & 6 & 15 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

なる並べかえを行うことを意味し、位置番号順に並べかえられた（再配置された）要素間の複式結線がパターン化できることを示している。すなわち、図 7.10 に示すように、位置番号（出端子番号）を再配置部により一連番号に並べかえて得られる LG0 または LG1 を実装単位とすれば、その間の複式結線は 4 出線単位の出線 A、B、C、D 間の簡単な結線で構成できる。なお、図では LG0 が B_i に対応し、LG1 が B_{i+1} ($i=1, 2$) に対応している。

以上、 $n=4$ を例にとって説明したが、節 7.3, (1) に示したように B_i と B_{i+1} の間の関係は $n = p^m$ (p : 素数、 m : 正整数) であれば成り立つので $n=4$ の場合と全く同様の結線形式が実現できる。異なる B_i の数は $(n-1)$ で

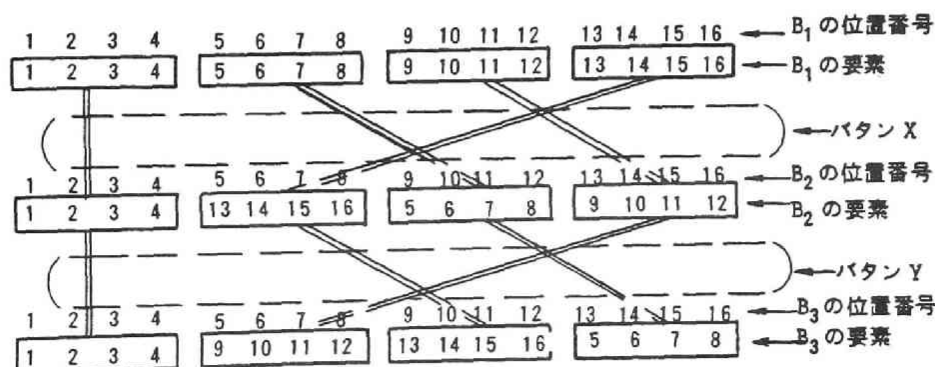


図 7.9 B_1 の要素 i の位置にある B_2 、 B_3 の要素

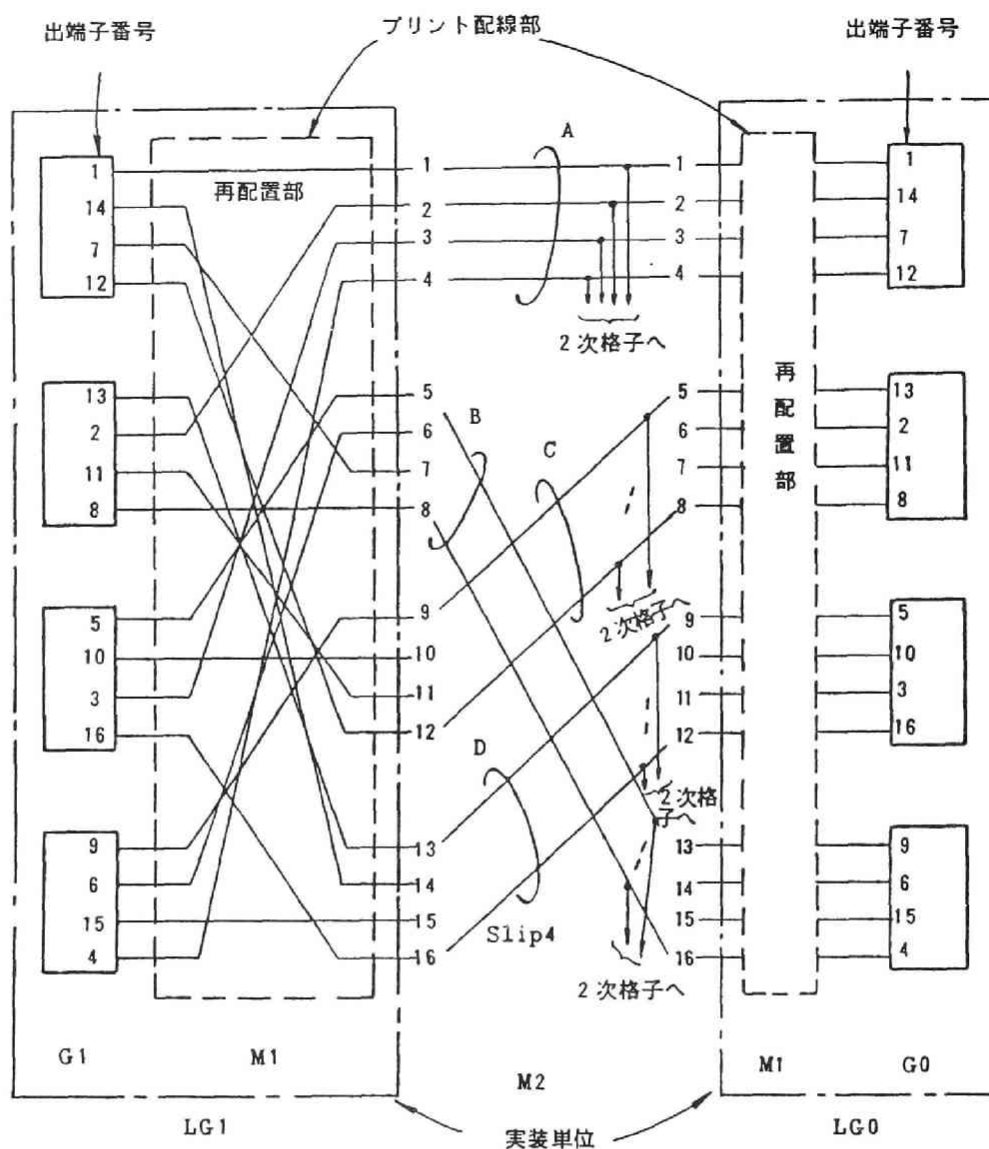


図 7.10 実装単位間の複式結線形式

あるので本方式により集線比 $(n-1):1$ [複式度 $(n-1)$] まで対応できる。

ここで図 7.10 に示した再配置部は多数の交差のある配線で示されているが、この配線が簡易化できることを次に示す。

(3) 再配置部の構成法

(i) 交差のない配線法

$n=4$ の場合には、図 7.11 に示すように表裏2面を使うプリント配線により、交差することのない配線として実現できる。

図 7.11 では数字の大きい出端子から配線をしているが、出端子 $(j+1)$ ま

で裏面配線されている領域は、高々、図 7.12 の斜線で示された領域である。出端子 j のスルーホールを斜線外に持ってくれば裏面配線は交差しない。格子の出端子 j から斜線外のスルーホールまでは他の出端子 k ($\geq j+1$) の表面配線の間隙を縫っていくことにより到達可能である。この原理は任意の出端子数についてあてはまるので任意の出端子数について再配置部の交差することのないプリント配線で実現できる。

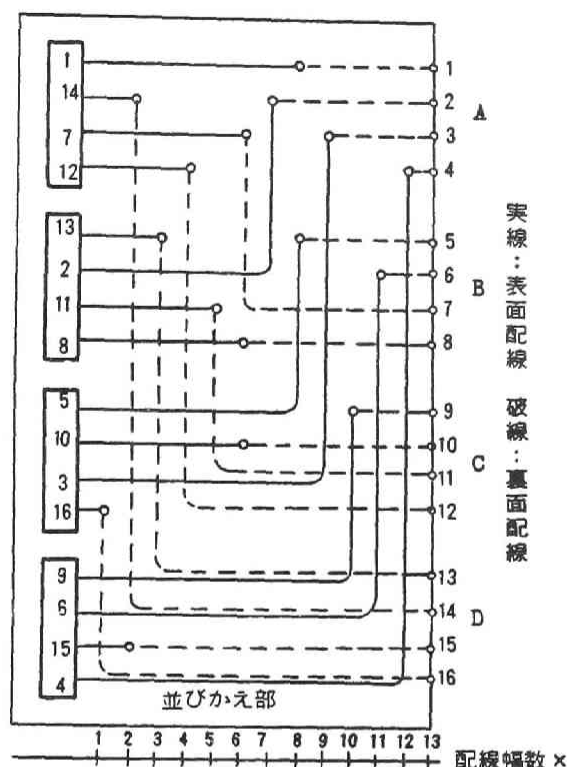


図 7.11 実装単位内の配線例

(ii) 再配置部の必要幅

配線間の必要間隔およびスルーホール間の必要間隔などから再配置部にはある程度以上の大きさが要求される。図 7.11 の縦軸上の長さは格子サイズによって規定されるため、考慮の対象外である。横軸（配線幅数） x についてはスルーホールの数が 16 あるので配線間隔を一定値 1 とすれば最大 17 の幅

が必要となる。しかし、図 7.11 の例では出線 1 のスルーホールは必要ないこと、出端子 14 と 15，7 と 8 と 10 のスルーホールが同一横座標上に並んでよいことから 13 にまで幅を減らしている。この幅が更に小さくできるかを検討する。

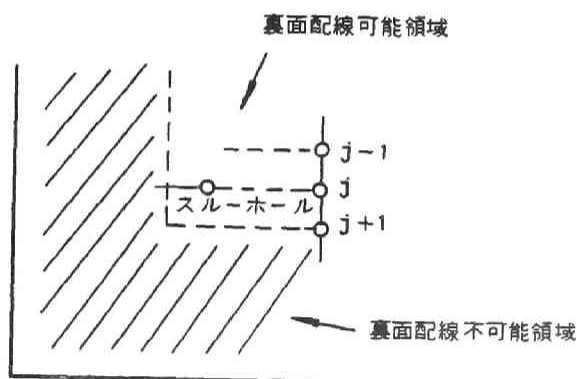


図 7.12 裏面配線可能領域

出端子 1 と同様の効果（これを E 効果—End 効果—と呼ぶ）が期待できるのは出線 16 である。それには、3 番目と 4 番目の格子を入れかえればよい。3 番目と 4 番目の格子を入れかえた場合の再配置部の構成を図 7.13 に示す。ここでは出端子 7 と 8 と 9 が同一横座標に並んでいることが幅を減少させる一要因となっている。この要因の実現には出端子 8 と 9 のように隣合う出端子間で左右の出端子番号が一致するように構成（これを N 効果—Neighbour 効果—と呼ぶ）すればよい。この 2 つの効果は常に実現できることを次に示す。

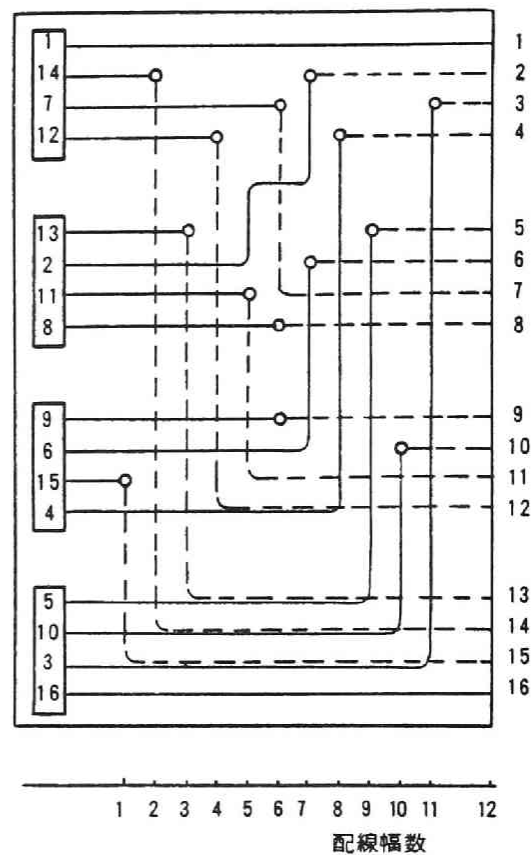


図 7.13 再配置部の改良された配線

ラテン方格 L_1

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & w^{n-2} \\ w & 1+w & \dots & w + w^{n-2} \\ w^2 & 1+w^2 & \dots & w^2 + w^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w^{n-2} & 1+w^{n-2} & \dots & 2w^{n-2} \\ 1 & 2 & \dots & 1 + w^{n-2} \end{bmatrix}$$

を考える。

B_1 の要素 n^2 ($n = p^m$; $n=4$ の場合には $n^2 = 16$) が一連番号を付けたときの最終番号であるが、要素 n^2 は L_1 の元 $(1+w^{n-2})$ の位置番号の 1 つである。そこで $(1+w^{n-2})$ の位置番号からなる出端子番号を最下段格子 n の出端子番号とすればよい。ここで、 L_1 のかわりに n^2 の位置に 0

(最上部の出線と対応させている) 以外の元が入っているラテン方格を用いてもよい。

一連番号から成る行列 A_1 の各行を $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ 、行列 B_1 の各行を $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1n}$ とすると BIBD の性質から任意の A_{1i} と B_{1j} の間には共通要素が 1 個だけある。図 7.13 に示される $n=4$ の場合の出端子 8 と 9 の関係すなわち N 効果を実現するために B_1 の行を入れかえて新しい行列 B'_1 を作る。 B'_1 の各行を B'_{1i} とすると

(イ) B'_{1i} の最終要素と A_{1i} の最終要素が共通要素であり、

(ロ) $B'_{1,i+1}$ の第 1 要素と $A_{1,i+1}$ の第 1 要素が共通要素である場合に N 効果が発揮される。しかし、 B'_{1n} と A_{1n} との間では E 効果実現のために最終要素を共通要素とするので、他に共通要素はなく、 $i+1 < n$ でなければならない。すなわち、(イ)、(ロ) が実現できるのは高々、 $i = n-2, n-4, n-6, \dots$ あるいは $i = 2, 4, 6, 8, \dots$ のように一個おきである。(イ) を実現するためには、 A_{1i} の最終要素が $i \cdot n$ なので L_1 の位置番号 $i \cdot n$ にある元を α_i とし、 α_i の位置番号から成る集合を B'_{1i} とすればよい。ただし、集合内の要素の順序は L_1 での列順に一致させる。同様に (ロ) を実現するためには $A_{1,i+1}$ の第 1 要素が $(i \cdot n + 1)$ であることから、 L_1 の位置番号 $(i \cdot n + 1)$ にある元を β_i とすると、 β_i の位置番号から成る集合を $B'_{1,i+1}$ とすればよい。このようにして E 効果、 N 効果を発揮させることができる。

ところで前項 (2) で述べた配線法では B_i と B_{i+1} の要素間の関係が最も重要であったので、 B_1 の行を入れかえて B'_1 を作ったからには、 B_i ($i \neq 1$) の行も入れかえて B'_i を作り、 B'_j と B'_{j+1} の要素間の関係を保つ必要がある。たとえば B_1 の行 h_1 と h_2 を入れかえて B'_1 が得られた場合には B_i の行 h_1 と h_2 も入れかえて B'_i を得る必要がある。これは節 7.2, (2), (i) の手順 (c) で L_i から B'_i を求めるのに L_i の元 $0, 1, w, w^2, \dots, w^{n-2}$ の順に B_i を求めたのに対して $0, \dots, w^{n-5} + w^{n-2}, w^{n-4}, w^{n-3} + w^{n-2}, w^{n-2}, 1 + w^{n-2}$, あるいは $0, w + w^{n-2}, w^2, w^3 + w^{n-2}, w^4, \dots, 1 + w^{n-2}$ の順に B'_i を求めることに対応している。

[例 7.3] $n=5$ の場合、

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

であるので $B'_{1,5}$ の要素は E 効果の実現のため元 4 の位置番号、すなわち

11, 17, 8, 4, 25

となり、 $B'_{1,3}$ の要素は N 効果実現のため位置番号 15 にある元 2 の位置番号、すなわち、

6, 22, 3, 19, 15

となり、 $B'_{1,4}$ の要素は位置番号 16 にある元 3 の位置番号、すなわち

16, 7, 23, 14, 5

とすればよい。 $B'_{1,1}$ の要素は E 効果の実現のため元 0 の位置番号、すなわち

1, 12, 18, 24, 10

となる。結局、 $B'_{1,2}$ の要素は残りの要素となり、元 1 の位置番号、すなわち

21, 2, 13, 9, 20

となる。

このようにして得られる $B'_{1,1}, B'_{1,2}, \dots, B'_{1,5}$ を用いた場合の再配置部の配線を図 7.14 に示す。

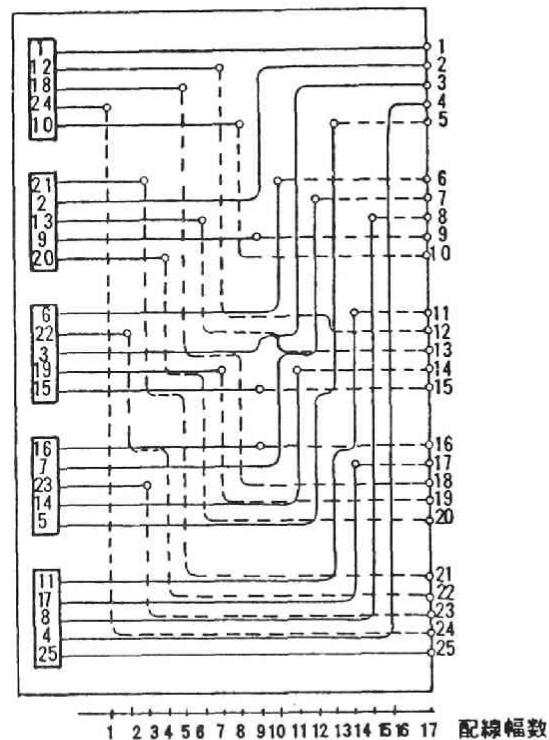


図 7.14 $n=5$ の場合の再配置部の配線

(4) 2種類の実装単位を許す場合

節 7.3,(2)で示した複式結線形式は図 7.10 からわかるように、すべての実装単位がLG1 (= LG0) のように複数個の格子と再配置部を持った同一構成をとっている。すなわち、複式度に合せてLG1 で示されるグリッドを用意すればよいが、複式度は最大 ($n-1$) までであった。

ところで、複式度1の場合の初段は2段と合せて1グリッドを構成していることも多く、そのよう場合には2以上の複式度(集線比 2:1 以上)に対しては通常別グリッド構成を許している。すなわち、基本架と拡張架の2種類の実装単位が許されている。このような場合には複式度 n (集線比 $n:1$) を実現できる。節 7.3,(2)では B_i ($i=1,2,\dots,n-1$) だけを用いたが、もう一つの利用できる行列として A_1 がある。そこで A_1 を基本架用、 B_i ($i=1,2,\dots,n-1$) を拡張架用に用いる。

$n=4$ の場合の A_1 は

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

であり、各行はちょうど $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{1,4}$ になっており、並べかえ後の出端子番号順に並んでいる。 A_1 と B_1' の間で複式をとることにすれば、 B_1' の出端子番号は出線番号と一致しているため、 A_1 の出線と B_1' の再配置部の

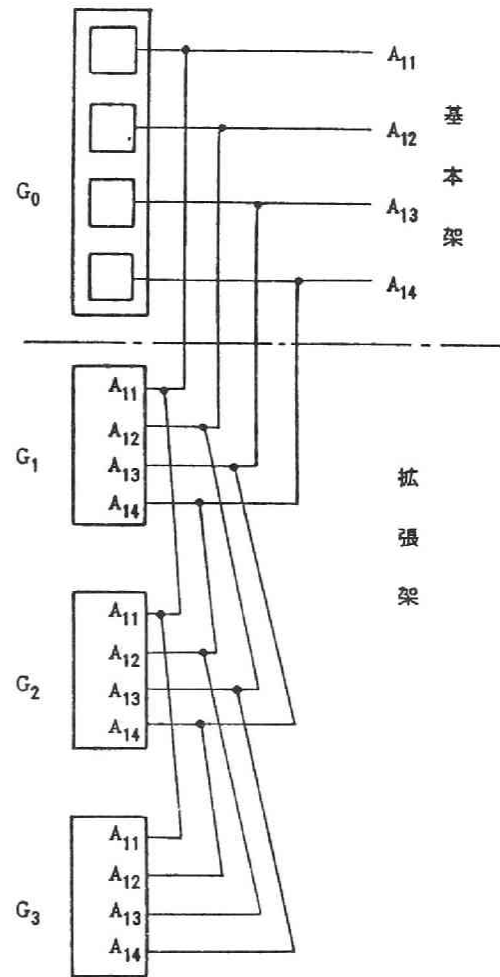


図 7.15 グリッド (実装単位) 間の配線

出線とは slip なしに接続すればよい。 B_i' と B_{i+1}' ($i=1,2$) の間の配線は節 7.3, (2) で述べた方法により行うとすると、図 7.15 に示すように複式度 1 (集線比 1:1) の場合には G_0 だけで構成し、複式度がふえるにつれて順次 G_1, G_2, G_3 を追加していけば複式度 4 で狭義の BSM になる。更に、 A_1 対応部が 2 段からなる架に收容されている場合、および B_i' 間の slip を含む配線を基本架と拡張架間の W 上の配線で吸収した場合を想定すると、たとえば図 7.16 のようになる。ただし、図 7.15, 図 7.16 とともに $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{1,4}$ はそれぞれ 4 本の出線を表している。ここでも $n=4$ の場合を例にとり説明を加えたが、 $n=P^m$ (p : 素数, m : 正整数) の場合には全く同様であることは明らかである。

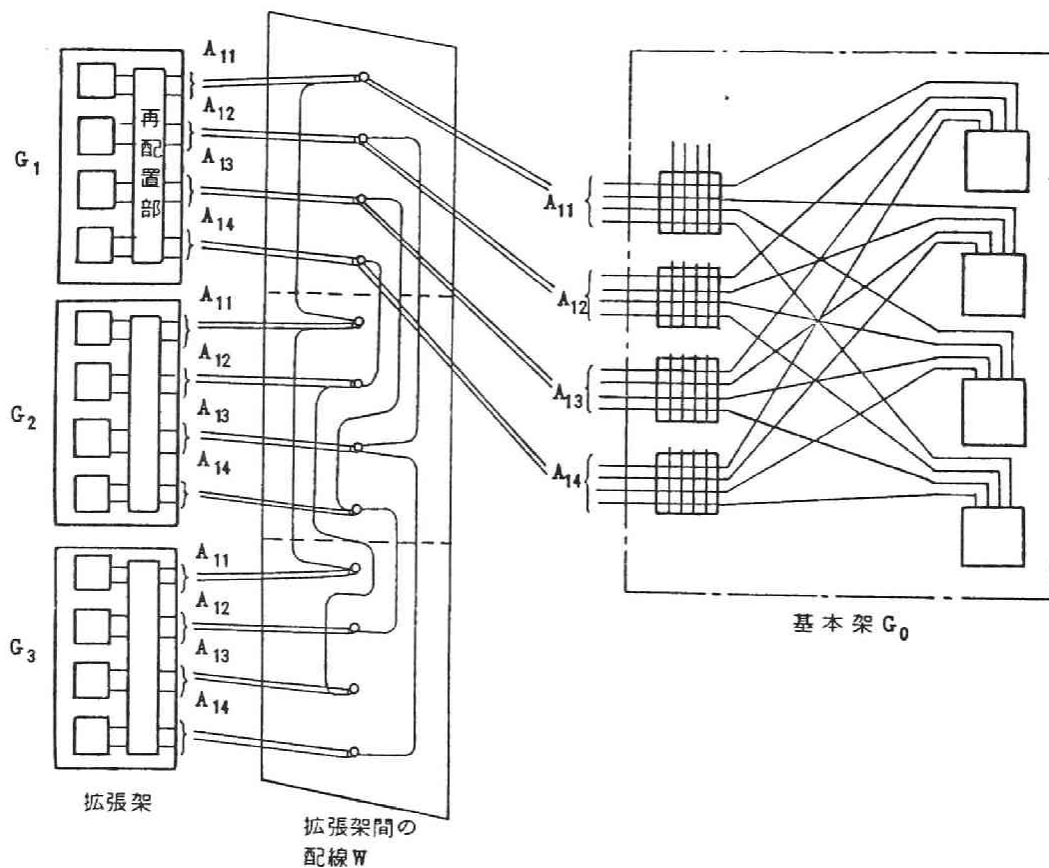


図 7.16 グリッド間の配線の 1 具体例

(5) 正方形格子によるBSM構成法のまとめ

$n \times n$ ($n=p^m$, p :素数, m :正整数)の正方形格子を用いるとき

- (a) 1 グリッド(実装単位)は n 個の格子で構成し、
- (b) 各グリッド G_i ($i=1,2,\dots,n-1$)の出端子番号はすべて同じで、 n 個の各格子の持つ出端子番号は節 7.3,(3),(ii) で述べた行列 B_1' の各行で与え、
- (c) G_i の出端子はグリッド内の再配置部における表裏 2面を使った交差のない配線により一連番号 $1,2,\dots,n-1$ に並べかえ、
- (d) G_i の格子 j がアクセスできる出線番号は、節 7.3,(3),(ii) で述べた行列 B_i' の第 j 行で与え($j=1,2,\dots,n$)、
- (e) 2 グリッド G_i, G_{i+1} 間では n 出線単位で複式結線し、 G_{i+1} の出端子 $1,2,\dots,n$ は G_i の出端子 $1,2,\dots,n$ と、 G_{i+1} の出端子 $n+1, n+2,\dots,2n$ は G_i の出端子 $n(n-1)+1, n(n-1)+2,\dots,n^2$ と、 G_{i+1} の出端子 j ($n^2 \geq j \geq 2n+1$) は G_i の出端子($j-n$)と複式結線すれば($i=1,2,\dots,n-2$)、

最大複式度 $(n-1)$ の広義のBSMを構成できる。

基本架と拡張架が別構成であることを許すときには、上記手順(c)による再配置部を持たせず n 個の格子そのもので基本架を構成し、基本架の n 個の格子の出端子に一連番号 $1,2,\dots,n^2$ を与え、基本架の出端子 i を G_1 の出端子 i と複式結線することにより、最大複式度 n のBSMを構成できる。

7.4 む す び

第4章で述べた均衡とび複式結線形式(BSM)を更に具体化するための配線法を短冊形格子 $1 \times n$ と正方形格子 $n \times n$ とに分けて示した。

短冊形格子では

- (1) 隣り合う2格子の同一出レベルにある出端子間の配線数の最大値を $(n-3)$ にできるのは $n=2^m$ (m :正整数)の場合に限られること、

および

- (2) 同一格子の隣り合う2出端子(2出レベル間)の配線数の分布を明らかにした。

正方形格子では、

- (3) 表裏2面のプリント配線による再配置部を持つ実装単位をとることにより、複式度2から $(n-1)$ までの広義のBSMを構成できること、
- (4) 実装単位を構成するのに必要な配線幅を減少させるためには、ラテン方格方格 L_i からBIBDを構成する際の元の順序に工夫がいること、

および

- (5) 基本架と拡張架が別構成であってもよい場合には、複式度2から n までの広義のBSMを構成できること

を明らかにした。

両配線法は実際にはどちらの格子に適用してもよく、単位となる入線数によってどちらの配線法をとるかを決めればよい。ここに示した配線法はBSMを実現するための一方法にすぎず、更に、これと異なるいろいろな配線法が考えられるのではないかと思う。

第8章 結 論

本研究では、加入者系交換機（電子交換機）の集線系構成法を検討した。集線系の検討は古くからグレージングのトラヒック設計問題として行われてきたが、状態数が多すぎるため、従来は待ち行列理論などの理論的検討ではなく、実験的な近似解析手法が用いられてきた。本研究は、与えられた条件に対応した望ましい集線系構成を示している。

第2章では、同一スイッチ内の負荷不均衡は殆ど無視できること及びスイッチ毎の呼量の日毎変動、空間的ばらつきを実際の交換機の運用データから明らかにし、その変動分は Bayes推定などの新しい推定法を用いても無視できないこと、スイッチ間の呼量変動を意識する必要のないスイッチサイズを明らかにし、現在、実用化検討中のデジタル交換機の集線装置は収容加入者数が多いため無作為に加入者を収容していれば集線装置間の呼量のばらつきは意識しなくてもよいことを示した。

第3章では、既存の電子交換機における変更をできるだけ少なくして、しかも柔軟に希望の集線比を実現できる方式を示した。クロスバ交換機でも容易に実現できることを確認しているが、クロスバ交換機は今後、徐々に姿を消すと考えられるため、本論文では省略した。ここで示した方法は複式結線時の工夫と出線選択順序の工夫が特長である。

第4章では、新しい複式結線形式として均衡飛び複式結線形式（BSM）を提案した。第5章では、BSMのトラヒック特性を分析し、BSMが入線間の負荷の不均衡の吸収効果および呼量容量をふやす効果を持っていることを明らかにした。多段の通話路網では両端にだけBSMを配した場合に最も効果があり、BSMを2段続けて設けることはトラヒック的に見て望ましくないことを明らかにした。またBSMを用いる場合の同時接続数分布の近似式を提案し、それが充分、実用に供し得るものであることを確認した。

第6章では、出線の一部にしかアクセスできない方式も含めてグレージングのトラヒック設計問題としてとらえ、その評価手法を考察した。つまり、グレージングの設計を実験計画法の配置の問題（ブロック計画）として対応付け、第4章で提案したBSMは最適なグレージングであることおよびそこで得た評価尺度は対称行列の固有値を求めるサブルーチンを持っていれば非常に簡単に求め得ることを示した。

第7章では、BSMを実装する場合の配線を容易にするために、短冊形 $1 \times n$ 格子スイッチと正方形格子スイッチのそれぞれに対して配線法を示した。また、実装面積を明らかにするために配線密度についても考察した。ここではBSMを構成する際に利用する BIBD の特徴を充分、生かした実装法を示し得た。

本論文で示した複式結線形式は計算機への効率的な入出力装置の収容法としても応用できると考えられるが、そのためには用いるスイッチ素子の検討など基礎的な検討が残されている。

謝 辞

本論文をまとめるにあたって御指導ならびに有益な御助言を頂きました京都大学工学部数理工学科 三根 久 教授、大野 勝久 助教授、および、長谷川 利治 教授に厚く御礼申し上げます。

本論文は、筆者が日本電信電話公社武蔵野電気通信研究所で行った研究成果をまとめたものであります。

本研究を進めるにあたって、終始、御指導頂きました日本大学工学部 藤木 正也 教授（元 藤木特別研究室長）、武蔵野電気通信研究所研究開発本部 橋田 温 調査役、および、トラヒック研究室 小平 邦夫 室長に心から感謝いたします。

また、本研究に対して、暖かい御支援を頂きました基幹交換研究部 五嶋 一彦 部長に感謝いたします。

参 考 文 献

- [1] 藤木、鈴木、高木：「電子交換機のトラヒック設計」、通研実報、Vol. 20、No.3、pp. 583-592 (1971) .
- [2] 伊藤、布谷、上田：「DEX-A11 方式のトラヒック設計」、通研実報、Vol. 23 No.5、pp.781-794 (1974) .
- [3] 高木、伊藤：「電子交換機用8段リンク方式の内部ふくそう率」、通研実報、Vol. 18、No.8、pp.1797-1831 (1969) .
- [4] 鈴木、布谷：「シミュレーションによるDEX-2 号交換機制御系のトラヒック設計」、通研実報、Vol. 20、No.11、pp.2365-2378 (1971) .
- [5] 伊藤、布谷、上田、岡田：“Methods of estimating central processing system traffic performances in SPC-electronic switching systems ”、8th International Teletraffic Congress、No.621 (1976) .
- [6] 橋田、戸田、和泉、別所：「市外電話網構成の分析」、通研実報、Vol. 28、No.6、pp.1187-1201 (1979)
- [7] C.Clos：“Automatic alternate routing of telephone traffic ”、Bell Lab. Rec.、Vol.32、No.2、pp.51-54 (1954) .
- [8] M.Eisenberg：“Engineering traffic networks for more than one busy hour”、Bell System Technical Journal (BSTJ)、Vol.56、No.1、pp. 1-20 (1977) .
- [9] 藤木 正也：「電気通信研究所におけるトラヒックの研究」、通研実報、Vol. 30、No. 8、pp. 1921 - 1975 (1981) .
- [10] T. Engset：“Die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Bestimmung der der Wahlerzahl in automatischen Fernsprechantern ”、Elektrotechnische Zeitschrift、Vol. 31、pp. 304- 306 (1918) .
- [11] 雁部 頴一：「改訂、電話トラヒック理論とその応用」、電子通信学会 (1970) .
- [12] 真山 政義：「トラフィック理論と実際」、一二三書房 (1968) .
- [13] 藤木・雁部：「通信トラヒック理論」、丸善 (1980) .
- [14] 電気通信研究所：「待ち行列数表」、(1980) .

- [15] J.A.Dartois : “ Lost - Call - Cleared Systems with Unbalanced Traffic Traffic Sources ”、Electrical Communication、vol.46、vol.46、No.1、pp. 32 - 40 (1971) .
- [16] 小島 哲：「通信呼理論の研究」、科学新興社 (1949) .
- [17] J.W.Cohen : “ The Generalized Engset Formulae ”、Philips Telecommunication Review、vol.18、No.4、pp.158-170 (1957)
- [18] C.Stein : “ Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution ”、Proceedings of the Third Berkeley Symposium、University of California Press、Vol.1、PP.197-206(1955) .
- [19] 竹内 啓：「現象と行動のなかの統計数理」、第5章、pp. 50 - 59、新曜社 (1980) .
- [20] B.Efron and C.Morris: “ Stein's Estimation Rule and Its Competitors - An Empirical Bayes Approach ”、Journal of the American Statisticcal Association、Vol.68、No.341、Theory and Methods Section、PP.117-130(1973) .
- [21] 上田 徹：「加入者呼量に関する統計解析」、通研成果報告、第20245 号(1983) .
- [22] 同上：「加入者呼量に関する統計解析」、昭和59年度信学会全国大会発表予定 (1984) .
- [22] 同上：「一種類の格子による各種集線比の実現方法」、昭和52年度信学会全国大会論文集 7-140 (1977) .
- [24] 上田、森沢、布谷：「ネットワーク収容位置拡張方式」、通研成果報告、第12931 号 (1978) .
- [25] 同上：「既存スイッチに依る複式接続及びその出線選択方式」、特許公報昭56 - 28436 (1981) .

- [26] 同上: "Telecommunication Switching System"、U.S.Patent No. 4,079,207 (1978) 他 7ヶ国.
- [27] E.Brockmeyer, et al : "The Life and Works of A.K.Erlang"、Trans. Danish Acad. Tech. Sci. Appendix I、 pp.113 -119 (1948).
- [28] E.M.Johnson : "Inherent Load Balance in Link Systems with Random Slip Multiples"、7th International Teletraffic Congress (7th ITC)、 p.236/1-8 (1973) .
- [29] T.L.Bower, et al : "Switching Network Employing a Homogeneous Matrix" 米国特許第 3,400,220号 (1968) .
- [30] O.A.Pedersen: "Algorithms for Constructing Ideal Gradings for Nonhoing Selectors"、IEEE Trans. Com.19、 NO. 2, pp.101 -112(1971).
- [31] G.L.Jonin, et al : "Design of Optimal Gradings"、 Symposium on Computer - Commun. Networks、 pp. 295 - 299 (1972).
- [32] 石井吾郎: 「実験計画法／配置の理論」、初版、6.2, 6.3、 pp.190 - 203 (1972)
- [33] I.Tange, et al : "Simplified Type of Gradings with Simplified Type of Gradings with Skipping"、3rd ITC, p.2 (1961).
- [34] B.Wallstrom : "Artificial Traffic Trials on Two Stage Link System Using a Digital Computer"、Ericsson Tech., 14, pp.259-289 (1958).
- [35] 鈴木、高木: 「クロスバリンク方式についての電子計算機を用いた疑似トラヒック実験 (その 1)」、通研実報、14、 pp. 923 - 945 (1965).
- [36] 上田 徹: 「均衡とび複式結線形式」、信学会論文誌、61-B、 pp. 129 - 135 (1978).

- [37] 同上：「均衡とび複式結線形式の構成法とトラヒック特性」、通研実報、28、
pp. 11 - 29 (1979).
- [38] 同上：「通話路網の出線接続方式」、特願昭 51-63329 号(1976).
- [39] 同上：「初段におけるグレージングの呼びふくそう率に与える影響」、通研成果
報告 10,000 号(1975).
- [40] 同上：「均衡とび複式結線法 (BSM)」、通研成果報告 11,876 号(1977)
- [41] O.A.Pedersen: "The Design of Gradings with Small Interconnection
Numbers for Random Hunt Selectors ", IEEE Trans. Commun.
23, No.7, pp. 714 - 721 (1975).
- [42] 日本数学会編集：「数学辞典」、第2版、実験計画、 pp. 849 - 850、岩波書店
(1968) .
- [43] 竹内 啓：「Optimum Designについて」、経営科学、5 (1961).
- [44] 上田 徹：「1 段集線装置の評価法」、信学論 (B)、61 - B、NO. 7、pp. 563
- 570(1978).
- [45] 同上：「不定位選択をする集線段の評価法」、通研実報、28、pp. 1579- 1591
(1979).
- [46] 同上：「ホモジーニャス・グレージングの評価法」、通研、成果報告 11175号
(1977).
- [47] 上田・小平：「均衡とび複式結線形式の配線法」、信学論 (B)、63 - B、NO.6、
pp. 574 - 580(1980).
- [48] 同上：「既存格子を用いた均衡とび複式結線形式構成法」、通研実報、29、
pp.2127 -2144(1980).

- [49] 同上：“Wiring Algorithms for Balanced Skip Multiples ”、Rev of ECL、29、
pp. 226 - 244(1981).
- [50] 同上：“Balanced Skip Multiples and Their Wireing Algorithms”、9th ITC、
NO. 545(1979).
- [51] 上田：「差点格子の実装方式」、特願昭52 - 083742 (1977) .
- [52] 上田、小平：「矩形差点格子の実装方式」、特願昭52 - 083743 (1977).
- [53] 上田：「均衡とび複式結線形式の実装法」、昭和53年度信学会全国大会論文集
7-59 (1978).
- [54] 上田、小平：「均衡とび複式結線形式の短冊形格子による実現法」、昭和53年度
信学会通信部門全国大会論文集 NO.163 (1978).

付録1 完全直交ラテン方格とそれから作られる

均衡不完備ブロック配置 (BIBD) の特徴

(1) 完全直交ラテン方格系の作り方

ラテン方格とは n 個の記号 a_1, a_2, \dots, a_n を各 n 回ずつとって n 行 n 列の正方行列に配列し、各行、各列に記号 a_1, a_2, \dots, a_n が一度ずつ現れるものを言う。 n 次 ($n \times n$) の 2 つのラテン方格 L_1 と L_2 とを重ねて作った方格で、 n^2 個の欄に n^2 個の相異なる対が全部出現するならば L_1 と L_2 とは直交すると言う。

L_1, L_2, \dots, L_{n-1} が互いに直交する $n \times n$ のラテン方格である時、 L_1, L_2, \dots, L_{n-1} を n 次ラテン方格の完全直交系と呼ぶ。これは次のようにして作られる。

【補題A1.1】 n を素数のべき乗とし、 w を有限体 $GF(n)$ の原始根とすると、 $(n-1)$ 個の直交するラテン方格は

$$L_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & w^{n-2} \\ w^j & 1 + w^j & \dots & w^{n-2} + w^j \\ w^{j+1} & 1 + w^{j+1} & \dots & w^{n-2} + w^{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w^{j+n-2} & 1 + w^{j+n-2} & \dots & w^{n-2} + w^{j+n-2} \end{bmatrix} \quad (A1.1)$$

($j = 1, 2, \dots, n-1$)

で与えられる。ここで

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & w^{n-2} \\ w & 1 + w & \dots & w^{n-2} + w \\ w^2 & 1 + w^2 & \dots & w^{n-2} + w^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w^{n-1}(=1) & 1 + w^{n-1} & \dots & w^{n-2} + w^{n-1} \end{bmatrix} \quad (A1.2)$$

と L_j とを比較すると第1行は等しいが、その他の行については一定の行だけずらした関係にある。すなわち、原始根の定義から ($w^{n-1} = 1$) であるので、 L_j の第2行は L_1 の第 $(j+1)$ 行と等しく、式 L_j の第 i 行は L_1 の $\{ \text{第}(i+j-1) \bmod n \}$ 行と等しくなる。つまり、 L_2 は L_1 の第2

行を第 n 行にまわし、第 3, 4, ..., n 行を順次 1 行ずつ繰り上げることにより得られる。この操作を繰り返すことにより任意の L_j が得られるので、式(A1.1)タイプの 1 ラテン方格、例えば L_1 だけを指定すれば、それに直交するラテン方格は自動的に求められる。

〔例 A1.1〕 一辺の長さが素数 p で与えられる p 次ラテン方格の完全直交系は表 A1.1 に与えられる原始根とそのべきの表を用いて式 (A1.1) より容易に求められる。例えば 3×3 のラテン方格は表 A1.1 より等号を mod. p すなわち mod. 3 で考えると原始根 $w=2$ 、そのべき $w^0=1, w^1=2, w^2=1$ であることがわかっており、

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & w \\ w & 1+w & w+w \\ w^2 & 1+w^2 & w+w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 (=0) & 4 (=1) \\ 4 (=1) & 5 (=2) & 6 (=0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

が求められ、 L_2 は L_1 の第 2 行と第 3 行を入れ替えれば求められ、

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。また、GF(5) から 5×5 のラテン方格 L_1 は mod 5 で等号を考えることにより

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & 1+w & w+w & w^2+w & w^3+w \\ w^2 & 1+w^2 & w+w^2 & w^2+w^2 & w^3+w^2 \\ w^3 & 1+w^3 & w+w^3 & w^2+w^3 & w^3+w^3 \\ 1 & 1+1 & w+1 & w^2+1 & w^3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

が求められ、 L_1 の第 2 行以降を入れ替えることにより L_2, L_3, L_4 は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

であることがわかる。

【補題 A1.2】 $g(x)$ を $GF(p)$ の元を係数とする次数 n の既約多項式とする。 $GF(p)$ の元を係数とする多項式の全体を $F(x)$ とする。 $F(x)$ の任意の多項式を $g(x)$ で割った余りを $\text{mod } g(x)$ で考えたものは体をなし、 $GF(p^n)$ である。ただし、 p は素数である。

表 A1.1 $GF(p)$ の原始根 x とそのべき乗 $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{p-1}$

p	x	べき
3	2	1, 2
5	2	1, 2, 4, 3
7	3	1, 3, 2, 6, 4, 5
11	2	1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6
13	2	1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7
17	3	1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6
19	2	1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10
23	5	1, 5, 2, 10, 4, 20, 8, 17, 16, 11, 9, 22, 18, 21, 13, 19, 3, 15, 6, 7, 12, 14

表 A1.2 GF (p) の既約多項式と原始根 α のべき乗

p^n	既約多項式	α のべき乗
2^2	$1+\alpha+\alpha^2$	$1, \alpha, \alpha^2=1+\alpha$
2^3	$1+\alpha^2+\alpha^3$	$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3=1+\alpha^2, \alpha^4=1+\alpha+\alpha^2, \alpha^5=1+\alpha, \alpha^6=\alpha+\alpha^2$
2^4	$1+\alpha^3+\alpha^4$	$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4=1+\alpha^3, \alpha^5=1+\alpha+\alpha^3, \alpha^6=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3, \alpha^7=1+\alpha+\alpha^2, \alpha^8=\alpha+\alpha^2+\alpha^3, \alpha^9=1+\alpha^2, \alpha^{10}=\alpha+\alpha^3, \alpha^{11}=1+\alpha^2+\alpha^3, \alpha^{12}=1+\alpha, \alpha^{13}=\alpha+\alpha^2, \alpha^{14}=\alpha^2+\alpha^3$
2^5	$1+\alpha^3+\alpha^5$	$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5=1+\alpha^3, \alpha^6=1+\alpha^4, \alpha^7=1+\alpha^2+\alpha^3, \alpha^8=\alpha+\alpha^3+\alpha^4, \alpha^9=1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4, \alpha^{10}=1+\alpha+\alpha^4, \alpha^{11}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3, \alpha^{12}=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4, \alpha^{13}=1+\alpha^2+\alpha^4, \alpha^{14}=1+\alpha, \alpha^{15}=\alpha+\alpha^2, \alpha^{16}=\alpha^2+\alpha^3, \alpha^{17}=\alpha^3+\alpha^4, \alpha^{18}=1+\alpha^3+\alpha^4, \alpha^{19}=1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4, \alpha^{20}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4, \alpha^{21}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4, \alpha^{22}=1+\alpha+\alpha^2, \alpha^{23}=\alpha+\alpha^2+\alpha^3, \alpha^{24}=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4, \alpha^{25}=1+\alpha^4, \alpha^{26}=1+\alpha+\alpha^3, \alpha^{27}=\alpha+\alpha^2+\alpha^4, \alpha^{28}=1+\alpha^2, \alpha^{29}=\alpha+\alpha^3, \alpha^{30}=\alpha^2+\alpha^4$
2^6	$1+\alpha+\alpha^6$	$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6=1+\alpha, \alpha^7=\alpha+\alpha^2, \dots\dots$
3^2	$2+\alpha+\alpha^2$	$1, \alpha, \alpha^2=1+2\alpha, \alpha^3=2+2\alpha, \alpha^4=2, \alpha^5=2\alpha, \alpha^6=2+\alpha, \alpha^7=1+\alpha$
3^3	$1+2\alpha^2+\alpha^3$	$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3=2+\alpha^2, \alpha^4=2+2\alpha+\alpha^2, \alpha^5=2+2\alpha, \alpha^6=2\alpha+2\alpha^2, \alpha^7=1+\alpha^2, \alpha^8=2+\alpha+\alpha^2, \alpha^9=2+2\alpha+2\alpha^2, \alpha^{10}=1+2\alpha+\alpha^2, \alpha^{11}=2+\alpha, \alpha^{12}=2\alpha+\alpha^2, \alpha^{13}=2, \alpha^{14}=2\alpha, \alpha^{15}=2\alpha^2, \alpha^{16}=1+2\alpha^2, \alpha^{17}=1+\alpha+2\alpha^2, \alpha^{18}=1+\alpha, \alpha^{19}=\alpha+\alpha^2, \alpha^{20}=2+2\alpha^2, \alpha^{21}=1+2\alpha+2\alpha^2, \alpha^{22}=1+\alpha+\alpha^2, \alpha^{23}=2+\alpha+2\alpha^2, \alpha^{24}=1+2\alpha, \alpha^{25}=\alpha+2\alpha^2$
5^2	$3+2\alpha+\alpha^2$	$1, \alpha, \alpha^2=2+3\alpha, \alpha^3=1+\alpha, \alpha^4=2+4\alpha, \alpha^5=3+4\alpha, \alpha^6=3, \alpha^7=3\alpha, \alpha^8=1+4\alpha, \alpha^9=3+3\alpha, \alpha^{10}=1+2\alpha, \alpha^{11}=4+2\alpha, \alpha^{12}=4, \alpha^{13}=4\alpha, \alpha^{14}=3+2\alpha, \alpha^{15}=4+4\alpha, \alpha^{16}=3+\alpha, \alpha^{17}=2+\alpha, \alpha^{18}=2, \alpha^{19}=2\alpha, \alpha^{20}=4+\alpha, \alpha^{21}=2+2\alpha, \alpha^{22}=4+3\alpha, \alpha^{23}=1+3\alpha$
5^3	$2+\alpha^2+\alpha^3$	$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3=3+4\alpha^2, \dots\dots$

〔例 A1.2〕 一辺の長さが素数 p のべき乗 p^n で与えられる p^n 次ラテン方格の完全直交系は表 A1.1 に与えられる $GF(p^n)$ の既約多項式と原始根 x のべきの表から容易に求められる。表 A1.2 は【補題 A1.2】を利用したものであり、既約多項式 $g(x)$ が与えられた時に x^k を $\text{mod } g(x)$ で考えたものである。例えば $GF(2^2)$ では $x^2/(x^2+x+1)$ の余りは $x+1$ (ただし多項式の係数は $GF(2)$ の元、すなわち $\text{mod } 2$ で等号を考えたものになっている) で与えられる。また、 x^k を $g(x)$ で割った余り $f(x)$ がわかれば、 x^{k+1} は $x \cdot f(x)$ を $g(x)$ で割った余りに等しいことを使うと、順に $\text{mod } g(x)$ で考えた原始根 x は求まる。

$GF(2^2)$ から 4×4 のラテン方格をつくる。式(A1.2)と表 A1.2 から

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x & 1+x \\ x & 1+x & 0 & 1 \\ 1+x & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ただし第 2 の行列は} \\ 0 \rightarrow 0, \quad 1 \rightarrow 1, \\ x \rightarrow 2, \quad 1+x \rightarrow 3 \\ \text{とおいたものである。} \end{array}$$

であり、第 2 行以降を入れ替えることにより L_2, L_3 は

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であることがわかる。

つぎに $GF(2^3)$ から 8×8 のラテン方格をつくる。

$$L_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & 1+x^2 & 1+x+x^2 & 1+x & x+x^2 \\ 1 & 0 & 1+x & 1+x^2 & x^2 & x+x^2 & x & 1+x+x^2 \\ x & 1+x & 0 & x+x^2 & 1+x+x^2 & 1+x^2 & 1 & x^2 \\ x^2 & 1+x^2 & x+x^2 & 0 & 1 & 1+x & 1+x+x^2 & x \\ 1+x^2 & x^2 & 1+x+x^2 & 1 & 0 & x & x+x^2 & 1+x \\ 1+x+x^2 & x+x^2 & 1+x^2 & 1+x & x & 0 & x^2 & 1 \\ 1+x & x & 1 & 1+x+x^2 & x+x^2 & x^2 & 0 & 1+x^2 \\ x+x^2 & 1+x+x^2 & x^2 & x & 1+x & 1 & 1+x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、 $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, x \rightarrow 2, x^2 \rightarrow 3, 1+x^2 \rightarrow 4, 1+x+x^2 \rightarrow 5,$

$1+X \rightarrow 6, X+X^2 \rightarrow 7$ と置き換えると、

$$L_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 4 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 0 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、第 2 行以降を入れ替えることにより $L_1 \sim L_6$ が求められる。

(2) 均衡不完備ブロック配置(BIBD)の作り方

S を素数 p のべきとし、 $S=p^m$ とする。このとき、【補題A1.1】により S 次の完全直交ラテン方格系を作ることができ、それを用いて

$$\left. \begin{aligned} v \text{ (品種または処理数)} &= S^2, \quad b \text{ (ブロック数)} = S^2 + S \\ r \text{ (任意の処理が現れるブロック数)} &= S + 1 \\ k \text{ (ブロックの大きさ=ブロックの含む処理数)} &= S \\ \lambda \text{ (任意の2処理が同一ブロックに現れる回数: 会合数)} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (A1.3)$$

あるいは

$$v = b = S^2 + S + 1, \quad r = S + 1, \quad k = S + 1, \quad \lambda = 1 \quad (A1.4)$$

なる BIBD がつぎのように作れる。

まず、式 (A1.3) で表されるパラメータを持つ BIBD の作り方について述べる。 L_i ($i=1, 2, \dots, S-1$) を $(S-1)$ 個の互いに直交するラテン方格とすると、 L_i の $S \times S$ の細胞に一連の番号を付して位置 $1, 2, 3, \dots, v (= S^2)$ とおく。つぎに大きさ $k=S$ のブロックをつぎのように構成する。

(i) L_1 の各行の位置番号を含むブロックを S 個つくる。すなわち、

$$(i \cdot S + j), \quad j=1, 2, \dots, S$$

を要素とするブロックを S 個 ($i=0, 1, 2, \dots, S-1$) 作る。

(ii) L_2 の各列の位置番号を含むブロックを S 個つくる。すなわち、

$$(i \cdot S + j), \quad i=0,1,2,\dots,S-1$$

を要素とするブロックを S 個 ($j=1,2,\dots,S$) 作る。

(iii) L_i の同じ元 (L_i の要素をブロック内の要素と区別するため、以下では元と呼ぶ) の乗っている細胞に対応する位置番号を含むブロックを S 個つくる。 ($i=1,2,\dots,S-1$)

これで式 (A1.3) で表される BIBD が作られた。

つぎに式 (A1.4) で表される BIBD を作る。

(i)' 項 (i) でつくられた各ブロックに番号 $S^2 + 1$ をつけ加える。

(ii)' 項(ii) でつくられた各ブロックに番号 $S^2 + 2$ をつけ加える。

(iii)' 項 (iii) でつくられた各ブロックに番号 $S^2 + 2 + i$ をつけ加える。
($i=1,2,\dots,S-1$)

(iv)' 新しい番号 $S^2 + 1, S^2 + 2, \dots, S^2 + S + 1$ よりなるブロックをつくる。

これらから次の補題が得られる。

【補題 A1.3】 処理数 v が素数の偶数べき乗の場合にはブロックの大きさ $k = \sqrt{v}$ 、会合数 $\lambda = 1$ で、次の性質(a),(b) を持つ BIBD が存在する。

(a) すべての処理を含む k 個ずつのブロックの集合 [項(i) ~ (iii) の項毎に作られるブロックの集合] I_1, I_2, \dots, I_{k+1} に分けることができる。

(b) I_i の各ブロックを行に対応させ、 k ブロックで k 行を構成して k 行 k 列の行列を作り、それを改めて M_i と呼ぶと、 M_1 と M_2 とは行と列が入れ替わったものである。

以上、述べたことを例で示す。

〔例 A1.3〕 $S = 5$ の場合、 $\{ \}$ 内：式 (A1.3) 対応の BIBD, $\langle \rangle$ 内：式 (A1.4) 対応の BIBD とする。

手順(i),(i)'により

$$\begin{aligned} &\langle \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}, 26 \rangle \\ &\langle \{ 6, 7, 8, 9, 10 \}, 26 \rangle \\ &\langle \{ 11, 12, 13, 14, 15 \}, 26 \rangle \\ &\langle \{ 16, 17, 18, 19, 20 \}, 26 \rangle \\ &\langle \{ 21, 22, 23, 24, 25 \}, 26 \rangle \end{aligned}$$

手順(ii),(ii)'により $\langle \{ 1, 6, 11, 16, 21 \}, 27 \rangle$
 $\langle \{ 2, 7, 12, 17, 22 \}, 27 \rangle$
 $\langle \{ 3, 8, 13, 18, 23 \}, 27 \rangle$
 $\langle \{ 4, 9, 14, 19, 24 \}, 27 \rangle$
 $\langle \{ 5, 19, 15, 20, 25 \}, 27 \rangle$

手順(iii),(iii)', L_1 により
 $\langle \{ 1, 10, 12, 18, 24 \}, 28 \rangle$
 $\langle \{ 2, 9, 13, 20, 21 \}, 28 \rangle$
 $\langle \{ 3, 6, 15, 19, 22 \}, 28 \rangle$
 $\langle \{ 4, 7, 14, 16, 23 \}, 28 \rangle$
 $\langle \{ 5, 8, 11, 17, 25 \}, 28 \rangle$

L_2 により
 $\langle \{ 1, 7, 13, 19, 25 \}, 29 \rangle$
 $\langle \{ 2, 8, 15, 16, 24 \}, 29 \rangle$
 $\langle \{ 3, 10, 14, 17, 21 \}, 29 \rangle$
 $\langle \{ 4, 6, 12, 20, 23 \}, 29 \rangle$
 $\langle \{ 5, 9, 11, 18, 22 \}, 29 \rangle$

L_3 により
 $\langle \{ 1, 8, 14, 20, 22 \}, 30 \rangle$
 $\langle \{ 2, 10, 11, 19, 23 \}, 30 \rangle$
 $\langle \{ 3, 9, 12, 16, 25 \}, 30 \rangle$
 $\langle \{ 4, 7, 15, 18, 21 \}, 30 \rangle$
 $\langle \{ 5, 6, 13, 17, 24 \}, 30 \rangle$

L_4 により
 $\langle \{ 1, 9, 15, 17, 23 \}, 31 \rangle$
 $\langle \{ 2, 6, 14, 18, 25 \}, 31 \rangle$
 $\langle \{ 3, 7, 11, 20, 24 \}, 31 \rangle$
 $\langle \{ 4, 10, 13, 16, 22 \}, 31 \rangle$
 $\langle \{ 5, 8, 12, 19, 21 \}, 31 \rangle$

手順(iv)' により $\langle 26, 27, 28, 29, 30, 31 \rangle$

が求めるブロックである。

〔例 A1.2 〕 で与えられた $S=2^2$ や $S=2^3$ の例に対しても全く同様にし

て均衡不完備ブロック配置が求められ、結局 $S=p^m$ (p :素数、 m :正整数) に対して均衡不完備ブロック配置が求められる。

実際に $S=4$ の場合には $S=3$ や $S=5$ と同程度の作業で作られ、式(A 1.3)対応の手順(ii)以外で作られるブロックは

$$\begin{array}{llll} B_1: \{1, 2, 3, 4\}, B_5: \{1, 14, 7, 12\}, B_9: \{1, 10, 15, 8\}, B_{13}: \{1, 6, 11, 16\} \\ B_2: \{5, 6, 7, 8\}, B_6: \{13, 2, 11, 8\}, B_{10}: \{9, 2, 7, 16\}, B_{14}: \{5, 2, 15, 12\} \\ B_3: \{9, 10, 11, 12\}, B_7: \{5, 10, 3, 16\}, B_{11}: \{13, 6, 3, 12\}, B_{15}: \{9, 14, 3, 8\} \\ B_4: \{13, 14, 15, 16\}, B_8: \{9, 6, 15, 4\}, B_{12}: \{5, 14, 11, 4\}, B_{16}: \{13, 10, 7, 4\} \end{array}$$

(i) (iii), L_1 (iii), L_2 (iii), L_3

である。ブロック内の要素の順序は、BIBD としては任意であるが、 L_i における規則性をできるだけ保存するために、ブロック内の j 番目の要素は L_i の第 j 列にある位置番号となっている。

しかし、 S の値が大きくなるにつれて、手順 (i) ~ (iii) を使って求めるのは面倒である。ここで一つのラテン方格 L_1 が求められるとそれに直交するラテン方格は L_1 の第2行以下を順次入れ替えれば求められたことに着目する。手順 (iii) の L_1 からできる S 個のブロックの集合で一つの行列 M を作る。その行列 M の第 i 行は元 $(i-1)$ の乗っている細胞に対応する位置番号から作られるブロックである (ただし、元は $0, 1, 2, \dots, S-1$ とする)。たとえば $S=4$ の場合には $B_5 \sim B_8$ から

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 7 & 12 \\ 13 & 2 & 11 & 8 \\ 5 & 10 & 3 & 16 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

である。 L_1 から作られる行列 M と同様に L_2 から作られるブロックの集合である行列 M' をとる。〔例 A1.2〕の L_1 と L_2 を比較すると第1行の元 $0, 1, 2, 3$ は同じである。すなわち位置番号 $1, 2, 3, 4$ に並んでる元は L_1 と L_2 で同じであるので M と M' では元 $1, 2, 3, 4$ の並んでいる位置は同じである。また L_1 の第2行目は L_2 の最終行 (第4行) と

等しく、 L_1 の第 K 行 ($K=3, 4$) は L_2 の第 $(K-1)$ 行と等しい。 M の第 1 行にある要素は L_1 における元 0 の乗っている位置番号であり、 L_1 で位置番号 14、すなわち、第 4 行第 2 列の要素 [以下では第 n 行第 m 列の位置を (n, m) と略記し、位置番号は $\{4(n-1)+m\}$ で計算されることに注意] である元は L_2 では $(3, 2)$ 、すなわち、位置番号 10 にあることになり、 L_1 で位置番号 7、すなわち、 $(2, 3)$ にある元は L_2 では $(4, 3)$ 、すなわち、位置番号 15 にあることになり、 L_1 で位置番号 12、すなわち、 $(3, 4)$ にある元は L_2 では $(2, 4)$ 、すなわち、位置番号 8 にあることになり、結局 M' の第 1 行は $\{1, 10, 15, 8\}$ になる。これは M の第 1 行の 1 はそのまま他の要素は 4 を引き、 $1 \sim 4$ の数になれば 12 をたすという操作をすれば M' の第 1 行が求められることを示しており、 M' の第 2 行以下もまったく同じ操作で求められ

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 15 & 8 \\ 9 & 2 & 7 & 16 \\ 13 & 6 & 3 & 12 \\ 5 & 14 & 11 & 4 \end{bmatrix},$$

すなわち、 $B_9 \sim B_{12}$ から作られる行列と一致する。 L から L を得る操作と同じであるので、 M から M' を得たのと同じ操作で M' から新しいブロックの集合の行列が得られる。これを一般化することにより、次の B IBD 構成法 (本文中の [アルゴリズム 4.1]) が得られる。

〔構成法 A1.1〕 一辺 S (S は素数のべき乗) のラテン方格 L が与えられている場合に、 L の同じ要素の乗っている位置番号で作られる S 個のブロックでできている行列を M_3 とする。均衡不完備ブロック配置を構成するために L と直交するラテン方格から得られる S 個ずつのブロックの集合 M_i ($i = 4, 5, \dots, S+1$) は、 M_{i-1} が得られると順次、つぎのようにして求めることができる。

- 要素 $1, 2, \dots, S$ はすべての M_i ($i = 3, 4, \dots, S+1$) について同じ位置にある。
- M_{i-1} で要素 K が乗っている位置と同じ M_i の位置には $k-S > S$ の時には $(k-S)$ が乗り、そうでなければ $(k-$

$2S+S^2$ が乗る。すなわち、 $\{(k - 2 S) \bmod . (S^2 - S) + S\}$
で計算される要素が乗る。

- M_1 は L の位置番号から成る行列である。
- M_2 は M_1 の行と列を入れ替えた行列である。

〔構成法 A1.1 〕 を使って $S = 8$ の場合の S 個ずつブロックの集合である行列 M_i を作ってみる。

$$L_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 4 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 0 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

であることがわかっている。 L_7 の位置番号から成る行列 M_1 は

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \\ 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64 \end{bmatrix}$$

である。 L_7 の同じ要素の乗っている位置番号から

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 19 & 28 & 37 & 46 & 55 & 64 \\ 9 & 2 & 51 & 36 & 29 & 62 & 23 & 48 \\ 17 & 50 & 3 & 60 & 45 & 38 & 15 & 32 \\ 25 & 34 & 59 & 4 & 13 & 54 & 47 & 24 \\ 33 & 26 & 43 & 12 & 5 & 22 & 63 & 56 \\ 41 & 58 & 35 & 52 & 21 & 6 & 31 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 & 8 & 1 & 1 & 4 & 4 & 6 & 1 & 3 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 2 & 7 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 4 & 3 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

が求められる。 M_3 から M_4 , M_4 から M_5 と順次求めていくことにより、行列 $M_4 \sim M_9$ は、つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 58 & 11 & 20 & 29 & 38 & 47 & 56 \\ 57 & 2 & 43 & 28 & 21 & 54 & 15 & 40 \\ 9 & 42 & 3 & 52 & 37 & 30 & 63 & 24 \\ 17 & 26 & 51 & 4 & 61 & 46 & 39 & 16 \\ 25 & 18 & 35 & 60 & 5 & 14 & 55 & 48 \\ 33 & 50 & 27 & 44 & 13 & 6 & 23 & 64 \\ 41 & 10 & 59 & 36 & 53 & 22 & 7 & 32 \\ 49 & 34 & 19 & 12 & 45 & 62 & 31 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 50 & 59 & 12 & 21 & 30 & 39 & 48 \\ 49 & 2 & 35 & 20 & 13 & 46 & 63 & 32 \\ 57 & 34 & 3 & 44 & 29 & 22 & 55 & 16 \\ 9 & 18 & 43 & 4 & 53 & 38 & 31 & 64 \\ 17 & 10 & 27 & 52 & 5 & 62 & 47 & 40 \\ 25 & 42 & 19 & 36 & 61 & 6 & 15 & 56 \\ 33 & 58 & 51 & 28 & 45 & 14 & 7 & 24 \\ 41 & 26 & 11 & 60 & 37 & 54 & 23 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 42 & 51 & 60 & 13 & 22 & 31 & 40 \\ 41 & 2 & 27 & 12 & 61 & 38 & 55 & 24 \\ 49 & 26 & 3 & 36 & 21 & 14 & 47 & 64 \\ 57 & 10 & 35 & 4 & 45 & 30 & 23 & 56 \\ 9 & 58 & 19 & 44 & 5 & 54 & 39 & 32 \\ 17 & 34 & 11 & 28 & 53 & 6 & 63 & 48 \\ 25 & 50 & 43 & 20 & 37 & 62 & 7 & 16 \\ 33 & 18 & 59 & 52 & 29 & 46 & 15 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 34 & 43 & 52 & 61 & 14 & 23 & 32 \\ 33 & 2 & 19 & 60 & 53 & 30 & 47 & 16 \\ 41 & 18 & 3 & 28 & 13 & 62 & 39 & 56 \\ 49 & 58 & 27 & 4 & 37 & 22 & 15 & 48 \\ 57 & 50 & 11 & 36 & 5 & 46 & 31 & 24 \\ 9 & 26 & 49 & 20 & 45 & 6 & 55 & 40 \\ 17 & 42 & 35 & 12 & 29 & 54 & 7 & 64 \\ 25 & 10 & 51 & 44 & 21 & 38 & 63 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 26 & 35 & 44 & 53 & 62 & 15 & 24 \\ 25 & 2 & 11 & 52 & 45 & 22 & 39 & 64 \\ 33 & 10 & 3 & 20 & 61 & 54 & 31 & 48 \\ 41 & 50 & 19 & 4 & 29 & 14 & 63 & 40 \\ 49 & 42 & 59 & 28 & 5 & 38 & 23 & 16 \\ 57 & 18 & 51 & 12 & 37 & 6 & 47 & 32 \\ 9 & 34 & 27 & 60 & 21 & 46 & 7 & 56 \\ 17 & 58 & 43 & 36 & 13 & 30 & 55 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 16 \\ 17 & 2 & 59 & 44 & 37 & 14 & 31 & 56 \\ 25 & 58 & 3 & 12 & 53 & 46 & 23 & 40 \\ 33 & 42 & 11 & 4 & 21 & 62 & 55 & 32 \\ 41 & 34 & 51 & 20 & 5 & 30 & 15 & 64 \\ 49 & 10 & 43 & 60 & 29 & 6 & 39 & 24 \\ 57 & 26 & 19 & 52 & 13 & 38 & 7 & 48 \\ 9 & 50 & 35 & 28 & 61 & 22 & 47 & 8 \end{bmatrix}$$

付録2 正規化行列Cに関連する性質

第6章の式(6.18)から次の性質が得られる。

〔性質 A2.1〕 正規化行列Cは、

$$\text{行和} = \text{列和} = 0$$

である実対称半正値行列である。

〔性質 A2.2〕 正規化行列Cは実対称半正値であるので、 $v \times v$ 直交行列Lが存在して

$$L C L' = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \rho_h & \\ & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} = \Lambda, \quad (\text{A2.1})$$

$$\rho_i > 0 \quad (i=1,2,\dots,h) \quad (\text{A2.2})$$

と対角化することができる。ここで

$$\text{rank } C = h \quad (\text{A2.3})$$

である。

$$\Lambda^* = \begin{bmatrix} \rho_1^{-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \rho_h^{-1} & \\ & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.4})$$

$$C^* = L' \Lambda^* L \quad (\text{A2.5})$$

とおくと

$$C \cdot \underline{\xi} = (\Phi' - N \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') \cdot \underline{x} \quad (\text{A2.6})$$

の特解として

$$\hat{\underline{x}} = C^* Q \quad (A2.7)$$

を得る。ここで

$$Q = (\Phi' - N \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') \underline{x} \quad (A2.8)$$

である。

(証明)

$$C = L' L C L' \quad L = L' (L C L') L = L' \Lambda L,$$

$$C (C^* Q) = L' \Lambda L (L' \Lambda^* L) Q = L' \Lambda \Lambda^* L Q$$

$$= L' \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} L Q$$

(Note: The matrix is a block diagonal matrix with a top-left block of size \$h\$ (number of eigenvalues) containing 1s on the diagonal and 0s elsewhere, and a bottom-right block of size \$v-h\$ containing 0s on the diagonal and 0s elsewhere. The matrix is symmetric and idempotent.)

$$= Q .$$

$$\therefore (L' [] L)^2 = L' [] L,$$

$$(L' [] L)' = L' [] L$$

であるので \$L' [] L\$、即ち、\$C C^*\$ は \$C\$ によって張られる部分空間への射影作用素である。 (証明終了)

ところで式 (A2.1) の \$L\$ は行列 \$C\$ の互いに正規直交な固有ベクトル

$$\underline{q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{iv})', \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (A2.9)$$

により

$$L' = (\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_v) \quad (A2.10)$$

で与えられる。

ここで次の性質が得られる。

〔性質 A2.3〕 \$\underline{q}_i\$ を正規化行列 \$C\$ の正の固有値 \$\rho_i\$ に対する固有ベクトルとするとき

$$\pi_i = \underline{q}_i' \hat{\underline{x}} \quad (A2.11)$$

は推定可能であって、そのときの推定量

$$\hat{\pi}_i = \underline{\underline{Q}}'_i \hat{\underline{\xi}} \quad (\text{A2.12})$$

の分散は σ^2 / ρ_i である。ただし、 σ^2 は式(6.10)で与えられる誤差項の分散である。(本文、第6章の〔性質2〕)

(証明) 式(A2.7)より

$$\hat{\pi}_i = \underline{\underline{Q}}'_i \hat{\underline{\xi}} = \underline{\underline{Q}}'_i \mathbf{C}^* \mathbf{Q} = \underline{\underline{Q}}'_i \mathbf{L}' \mathbf{\Lambda}^* \mathbf{L} \mathbf{Q} \quad (\text{A2.13})$$

式(A2.8)より

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Q}) &= (\Phi' - \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \cdot \Psi') E(\underline{\underline{x}}) \\ &= (\Phi' - \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \cdot \Psi') (\Phi \underline{\underline{\xi}} + \Psi \underline{\underline{\eta}}) \\ &= (\Phi' - \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \cdot \Psi') \Phi \underline{\underline{\xi}} \\ &\quad + (\Phi' - \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \cdot \Psi') \Psi \underline{\underline{\eta}} \\ &= (\mathbf{D}_r - \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \cdot \mathbf{N}') \underline{\underline{\xi}} \\ &\quad + (\mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \cdot \mathbf{D}_k) \underline{\underline{\eta}} \\ &= \mathbf{C} \underline{\underline{\xi}} \end{aligned} \quad (\text{A2.14})$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \Phi' \Phi = \mathbf{D}_r, \Psi' \Phi = \mathbf{N}', \Phi' \Psi = \mathbf{N}, \\ \Psi' \Psi = \mathbf{D}_k, \mathbf{C} = \mathbf{D}_r - \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \cdot \mathbf{N}' \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\pi}_i) &= \underline{\underline{Q}}'_i \mathbf{L}' \mathbf{\Lambda}^* \mathbf{L} E(\mathbf{Q}) = \underline{\underline{Q}}'_i \mathbf{L}' \mathbf{\Lambda}^* \mathbf{L} \mathbf{C} \underline{\underline{\xi}} \\ &= \underline{\underline{Q}}'_i \mathbf{L}' \mathbf{\Lambda}^* \mathbf{L} \mathbf{L}' \mathbf{\Lambda} \mathbf{L} \underline{\underline{\xi}} \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{Q}}'_i \mathbf{L}' \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \text{h 個} & \\ & 1 & \\ & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{array} \right] \mathbf{L} \underline{\underline{\xi}}$$

$$= \underline{\underline{Q}}'_i \underline{\underline{\xi}} = \pi_i \quad (\text{A2.15})$$

従って、 π_i は推定可能である。

式 (A2.14) と

$$(I - \Psi \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi')^2 = I - \Psi \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi'$$

及び

$$(I - \Psi \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') \Psi \eta = 0$$

なる関係を用いると

$$\begin{aligned} V(Q) &= E\{(Q - C\xi)(Q - C\xi)'\} \\ &= E\{(\Phi' - N \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') \underline{x} - (D_r - N \cdot D_k^{-1} \cdot N') \underline{\xi}\} \\ &\quad \cdot \{(\Phi' - N \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') \underline{x} - (D_r - N \cdot D_k^{-1} \cdot N') \underline{\xi}\}' \\ &= E\{\Phi' (I - \Psi \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') (\underline{x} - \Phi \underline{\xi}) (\underline{x} - \Phi \underline{\xi})' \\ &\quad (I - \Psi \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi')' \Phi\} \\ &= E\{\Phi' (I - \Psi \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') (\underline{x} - \Phi \underline{\xi} - \Psi \eta) \\ &\quad (\underline{x} - \Phi \underline{\xi} - \Psi \eta)' (I - \Psi \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') \Phi\} \\ &= \Phi' (I - \Psi \cdot D_k^{-1} \cdot \Psi') \Phi \sigma^2 \\ &= C \sigma^2 \end{aligned} \tag{A2.16}$$

となる。

式 (A2.15)、(A2.15) 及び CC^* が射影作用素であることから

$$\begin{aligned} V(\hat{\pi}_i) &= E\{(\underline{q}_i' \hat{\underline{\xi}} - E(\hat{\pi}_i)) \{(\underline{q}_i' \hat{\underline{\xi}} - E(\hat{\pi}_i))\}'\} \\ &= E\{(\underline{q}_i' \hat{\underline{\xi}} - \underline{q}_i' E(\hat{\underline{\xi}})) \{(\underline{q}_i' \hat{\underline{\xi}} - \underline{q}_i' E(\hat{\underline{\xi}}))\}'\} \\ &= \underline{q}_i' E\{(\hat{\underline{\xi}} - E(\hat{\underline{\xi}})) \{(\hat{\underline{\xi}} - E(\hat{\underline{\xi}}))\}'\} \underline{q}_i \\ &= \underline{q}_i' E\{C^* Q - E(C^* Q) \{C^* Q - E(C^* Q)\}'\} \underline{q}_i \\ &= \underline{q}_i' C^* E\{Q - E(Q) \{Q - E(Q)\}'\} C^* \underline{q}_i \\ &= \underline{q}_i' C^* V(Q) C^* \underline{q}_i \\ &= \underline{q}_i' C^* CC^* \underline{q}_i \sigma^2 \\ &= \underline{q}_i' C^* \underline{q}_i \sigma^2 \\ &= \underline{q}_i' L' \Lambda^* L \underline{q}_i \sigma^2 \\ &= \sigma^2 / \rho_i \end{aligned} \tag{A2.17}$$

となる。

(証明終了)

〔性質 A2.4〕 正規化行列 C の階数を h とすると、 h 個の固有ベクトルに対応する h 個の母数 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_h$ が推定可能であり、推定量

$$\hat{\pi} = (\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots, \hat{\pi}_h)' \quad (A2.18)$$

の分散、共分散行列 $V(\hat{\pi})$ は

$$V(\hat{\pi}) = \begin{bmatrix} \rho_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_h^{-1} \end{bmatrix} \sigma^2 \quad (A2.19)$$

で与えられる。(本文、第6章の〔性質 3〕)

(証明)

$\hat{\pi}$ の共分散行列 $V(\hat{\pi}) \triangleq (v_{ij})$ は式 (A2.17) と同様に求めることができ、

$$v_{ij} = \underline{q}_i' L' \Lambda^* L \underline{q}_j \sigma^2$$

である。従って、式 (A2.19) が得られる。

〔性質 A2.5〕 行列 C の階数が $(v-1)$ のときには任意の ξ の対比

$$\pi = \underline{b}' \cdot \xi \quad (A2.20)$$

が推定可能で、その BLUE は

$$\hat{\pi} = \sum_{i=1}^{v-1} t_i \underline{q}_i' \xi \quad (A2.21)$$

で与えられ、BLUE の分散は

$$V(\hat{\pi}) = \sum_{i=1}^{v-1} t_i^2 \sigma^2 / \rho_i \quad (A2.22)$$

で与えられる。(本文、第6章の〔性質 4〕)

(証明)

行列 C の階数が $(v-1)$ の時には固有値 0 のベクトルは

$$\underline{J}_v = (1, 1, \dots, 1)$$

であることから正規直交行列

$$L' = (\underline{q}_1', \underline{q}_2', \dots, \underline{q}_{v-1}', \underline{J}_v / \sqrt{v}) \quad (A2.23)$$

により行列 C は対角化される。ここで、 \underline{q}_i ($i=1,2,\dots,v-1$) は行列 C の 0 でない固有値 $\rho_i > 0$ に対する固有ベクトルである。対比の条件から

$$\underline{b}' \cdot \underline{J}_v = 0 \quad (\underline{b} \text{ と } \underline{J}_v \text{ とは直交する})$$

であり、〔性質 A2.3〕から各 $(\underline{q}_i, \underline{\xi})$ は推定可能であり、その BLUE

の分散 $V(\hat{\pi})$ は、

$$i \neq j \text{ のとき、 } \underline{q}_i' C \underline{q}_j = 0$$

$$i = j \text{ のとき、 } \underline{q}_i' C \underline{q}_i = 1/\rho_i$$

であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} V(\hat{\pi}) &= E\{ \hat{\pi} - E(\hat{\pi}) \}^2 \\ &= E\left[\sum_i t_i \underline{q}_i' \{ \underline{\xi} - E(\underline{\xi}) \} \{ \underline{\xi} - E(\underline{\xi}) \}' \sum_j t_j \underline{q}_j \right] \\ &= \sum_i t_i \underline{q}_i' C \sum_j t_j \underline{q}_j \sigma^2 \\ &= \sum_{i=1}^{v-1} t_i^2 \sigma^2 / \rho_i \end{aligned}$$

である。

(証明終了)

